MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

HATODIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1897

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A MATHEMATIKAI ES PHYSIKAI LAPOK

HATODIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

KLEIN FELIX: Összehasonlító elmélkedések ujabb geometriai kutatásokról. Fordította *Kopp Lajos.* 5.

Második füzet.

GAUSS KÁROLY FRIGYES: A felületek általános elmélete (Disquisitiones generales circa superficies curvas). Fordította *Szíjártó Miklós.* 47.

Harmadik füzet.

BOLYAI BOLYAI JÁNOS: A térnek absolut igaz tudománya, a mely független Euklides (a priori soha be nem bizonyítható) XI. axiomájától. Ezt követi a kör geometriai quadraturája ez axioma helytelen voltának esetében. Fordította *Rados Ignácz* 147.

Negyedik füzet.

CAYLEY ARTHUR: Az algebrai alakokról, Hatodik értekezés. (A sixth memoir upon Quantics). Fordította *Kármán Ferencz.* 195.

Ötödik füzet.

SADI CARNOT: Elmélkedés a tűz mozgató ereje s a gépek felett, a melyek ezen mozgató erő kifejtésére alkalmasak. Fordította *Lukáts László.* 245.

Hatodik és hetedik füzet.

HELMHOLTZ HERMANN: Az erő megmaradásáról. Ford. *Szekeres Kálmán.* 311.

Nyolczadik füzet.

GAUSS KÁROLY FRIGYES: A földi mágneses erő intenzitása abszolut egységekben. Fordította *Tangl Károly.* 379.

---

*

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Szerzők szerint:

Bolyai János: A térnek absolut igaz tudománya 147
Carnot Sadi: Elmélkedés a tűz mozgató ereje s a gépek felett... ... 245
Cayley Arthur: Az algebrai alakokról 195
Gauss Károly: A felületek általános elmélete 47
— A földi mágneses erő intenzitása 379
Helmholtz Hermann: Az erő megmaradásáról 311
Klein Felix: Összehasonlító elmélkedések ujabb geometriai kutatásokról 5

Forditók szerint:

Kármán Ferencz: Az algebrai alakokról 195
Kopp Lajos: Összehasonlító elmélkedések ujabb geometriai kutatásokról 5
Lukáts László: Elmélkedés a tűz mozgató ereje s a gépek felett 245
Rados Ignácz: A térnek absolut igaz tudománya 147
Szekeres Kálmán: Az erő megmaradásáról 311
Szíjártó Miklós: A felületek általános elmélete 47
Tangl Károly: A földi mágneses erő intenzitása 379

ÖSSZEHASONLITÓ ELMÉLKEDÉSEK

UJABB GEOMETRIAI KUTATÁSOKRÓL

IRTA

KLEIN FELIX

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

MAGYARRA FORDITOTTA

KOPP LAJOS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1897

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ.

KLEIN FELIX-nek, a hírneves német mathematikusnak, egyik ifjukori munkáját mutatjuk be ezennel a magyar mathematikai olvasóközönségnek, azt a munkáját, a melyben — 1872-ben az erlangeni egyetemen — első tanszékének elfoglalásakor programmját fejtette ki. E programm a benne foglalt eszmék gazdagságánál és termékenységénél fogva a legújabbkori geometria fejlődésére döntő befolyást gyakorolt, úgy hogy túlzás nélkül mondhatjuk, KLEIN e programmja egyszersmind a geometria újabb fejlődésének programmja lett. Az algebra talaján kifejlődött csoportelméletnek KLEIN, az alapvető fogalmak kellő általánosítása után, egészen új és sokkal tágabb területeket hódított meg, a melyeken az módszereinek mélyreható erejénél fogva, fényes sikerekre vezetett. A csoportelméleti módszerek emez erejének és termékenységének felismerésében és kellő hangsúlyozásában keresendő e munka főérdeme.

Ezzel ugyanis a szerző oly elvi magaslatot nyer, a melyről a geometria legkülönbözőbb ágai tisztán tekinthetők át és így ismét az egységes módszerekkel való tárgyalás medrébe visszavezethetők.

E munkának emez előnyei ébresztették fel bennem a vágyat, hogy ezeket a magyar mathematikus közönséggel is megismertessem. Ezért fordultam KLEIN-hez azzal a kéréssel, hogy engedné meg erlangeni programmjának magyar nyelven való kiadását. KLEIN beleegyezését lekötelező szívességgel megadta. Fogadja érte e helyen is hálás köszönetem kifejezését.

A fordítás nem könnyű munkáját, Kopp Lajos tagtársunk hálára méltó készséggel vállalta el, a ki a lehetőség határain belül szószerinti fordítást iparkodott adni.

Még végül megjegyezzük, hogy ugyanez a munka olasz és franczia nyelven is megjelent. Az olasz fordítást FANO GINO az Annali di Matematica 17. kötetében, a francziát pedig PADÉ H. az Annales de l'école normale supérieure czímű folyóiratban tette közzé. Az olasz fordítást KLEIN maga megtoldotta néhány kiegészítő megjegyzéssel. Ezek a magyar fordításban is helyet találtak a szöveg alatti jegyzetekben [ ] alakú zárjelek között.

Rados Gusztáv.

ÖSSZEHASONLÍTÓ ELMÉLKEDÉSEK ÚJABB GEOMETRIAI KUTATÁSOKRÓL.

A geometria utolsó ötven évi haladásában első helyet foglal el a projektiv geometria* fejlődése. Míg eleinte úgy látszott, hogy az úgynevezett metrikus vonatkozások, — melyek projiciálásnál nem maradnak változatlanul — nem vonhatók bele a tárgyalásába, addig újabb időben ezeket is megtanulták projektiv szempontból felfogni, úgy, hogy most a projektiv módszer az egész geometriát öleli fel. A metrikus relácziók itt többé nem mint maguknak a térbeli dolgoknak tulajdonságai szerepelnek, hanem mint ezeknek vonatkozásai egy alapelemhez, a végtelenben fekvő gömbi körhöz. Ha a térbeli dolgoknak így lassanként nyert felfogási módjával a közönséges (elemi) geometria képzeteit áttekintjük, önként keresünk egy általános elvet, mely szerint e két módszer kifejlődhetett. Ez a kérdés annál fontosabb, mert az elemi és projektiv geometria mellé még egy egész sora a — bár kevésbé kifejlett — módszereknek sorakozik, a melyektől az önálló létezés jogát szintén meg nem tagadhatjuk. Ide tartozik a reciprok sugaraknak, a raczionális átalakításoknak stb. geometriája, a melyeket a következőkben említeni és tárgyalni fogunk.

Hogyha a következőkben megkisértjük egy ily elv felállítását, nem fejtünk ki tulajdonképen új gondolatot, hanem csak tisztán és világosan körülhatároljuk azt, amit többé-kevésbé határozottan már többen gondoltak. Az ily összefoglaló elmélkedések közzététele pedig annál jogosultabbnak látszott, mert az anyagánál fogva egy-

---

* V. ö. I. jegyzet.

séges geometria a mellett a gyors fejlődése mellett, melynek újabb időkben indult, a majdnem különvált tudományágoknak [1] egész sorozatára bomlott, melyek egymástól meglehetősen függetlenül fejlődnek tovább. A mellett ama szándék is vezetett, hogy Lie által és általam újabb dolgozatokban kifejtett módszereket és szempontokat tárgyaljak. Mindkettőnk dolgozatai — bármily különböző tárgyakra vonatkoztak is — megegyezően az itt tárgyalt felfogásra késztettek, úgy hogy szükséges volt a felfogás e módját is egyszer kifejteni és a belőle kifolyó szempontból az idevágó dolgozatokat tartalomra és irányra nézve jellemezni.

Eddig csupán geometriai kutatásokról volt ugyan szó, de ez alatt a különböző kiterjedésű sokaságok elméletét is kell érteni, a melyek a geometriából úgy származtak, hogy a tisztán mathematikai tárgyalásra lényegtelen térbeli képtől eltekintünk.[2] A sokaságok vizsgálatánál ép annyi tipus van, mint a geometriában és ott is feladatunk az egymástól függetlenül eszközölt vizsgálatok megegyezését és különbözését kimutatni. Elvont értelemben elegendő volna, a következőkben tisztán többszörös kiterjedésű sokaságokról beszélnünk, de a tárgyalás világosabbá és érthetőbbé lesz, ha a szokásos térbeli képzetekhez fűzzük. Kiindulván a geometriai tárgyak vizsgálatából és belőlük, mint egy példából, kifejtvén az általános eszméket, azt az utat követjük, melyet a tudomány fejlődésében vett, és melyet a tárgyalásnál legelőnyösebben lehet alapúl venni.

A következőkben tárgyalt tartalomnak előzetes kifejtése itt nem igen lehetséges, mert e tartalom maga már szűkebb keretbe nem foglalható;[3] a fejezetek czímei megadják majd a gondolat általános haladását.

A dolgozat végéhez néhány jegyzetet csatoltam, a melyekben vagy a szöveg általános magyarázatának érdekében hasznos egyes

---

[1] V. ö. II. jegyzet.

[2] V. ö. III és IV jegyzet.

[3] Ez a szűk keret a következőknek hiánya, mert a megértést lényegesen meg fogja nehezíteni. De ennek csak egy sokkal bővebb fejtegetéssel lehetett volna elejét venni, a melyben az itt csak érintett egyes elméleteket kimerítően kellett volna tárgyalnom.

pontokat jobban fejtettem ki, vagy pedig igyekeztem a szövegre mérvadó elvont mathematikai álláspontot rokon álláspontoktól elválasztani.

1. §.

Térbeli transzformácziók csoportjai. — Főcsoport. — Egy általános probléma felállítása.

A következő fejtegetéseknél legszükségesebb fogalom a térbeli átalakitások csoportjának fogalma.

A térnek [1] tetszőleges számú transzformácziói összetéve ismét transzformácziót adnak. Hogyha a transzformáczióknak egy adott sorozata oly tulajdonságú, hogy minden átalakitás, mely a sorozathoz tartozókból összetétel útján származik, megint a sorozathoz tartozik, akkor ez transzformáczió csoportot alkot.[2] Példa a transformáczió-csoportra a mozgások összessége, (ha minden mozgást, mint egy az egész térre alkalmazott müveletet tekintünk). Benne foglaltatik például az egy pont körüli rotácziók csoportja.[3] Nagyobb csoportot viszont, mely a mozgások csoportját magában foglalja, ad a kollineácziók összessége. A dualisztikus átalakitások ellenben nem képeznek csoportot, mert két dualisztikus átalakitás együttvéve kollineácziót ad; csoportot kapunk azonban megint, ha a dualisztikus átalakitások összességét a kollineár átalakitások összegével összekapcsoljuk.[4]

---

[1] Úgy képzeljük, hogy ez a transzformáczió a térbeli alakzatok összességét egyidejüleg éri és azért egyszerűen a térnek transzformáczióiról beszélünk. A transzformácziók, mint pl. a dualisztikusak, a pontok helyett más elemeket vezethetnek be, ezt a szövegben nem különböztetjük meg.

[2] [Ez a definiczió még kiegészítésre szorúl. A szöveg csoportjainál implicite feltételezzük, hogy minden ott szereplő müveletet az inverz müvelet kiséri; ha azonban végtelen sok müveletről van szó, ez semmiképen sem magának a csoportjelzésnek következménye; ez tehát oly feltevés, melyet a csoport definicziója mellé kell rendelnünk.]

[3] Camille Jordan összeállította a mozgás csoportjában összes lehetséges csoportokat. Sur les groupes de mouvements. Aunali di Matematica. II. kt.

[4] Egy csoport transzformáczióinak nem kell okvetlenül, — a hogy ez a szövegben előforduló csoportoknál ugyan mindig áll — folytonos egymásutánban meglenniök. Így csoportot képez pl. a mozgások véges sora is, melyek

Vannak már most transzformácziók, melyek a térbeli alakzatok geométriai tulajdonságait egyáltalában meg nem változtatják. Geométriai tulajdonságok ugyanis függetlenek ama helyzettől, melyet a megvizsgálandó alakzat a térben elfoglal, továbbá abszolut nagyságától és amaz értelemtől,[1] melyben részei elvannak rendezve. A térbeli alakzat tulajdonságai tehát változatlanul megmaradnak a tér összes mozgásai, a hasonlósági transzformácziók és a tükrözés folyamata mellett és mindazoknál a transzformáczióknál, melyek ezekből összetehetők. Mind eme transzformácziók összességét a *térbeli változtatások főcsoportjának* nevezzük;[2] *geometriai tulajdonságok a főcsoport transzformáczióinál nem változnak.* De viszont azt is mondhatjuk, hogy a *geométriai tulajdonságokat jellemzi változatlanságuk a főcsoport transzformáczióival szemben.* Hogyha ugyanis a tért egy pillanatig mozdulatlannak tekintjük, mint merev sokaságot, akkor mindegyik alakzat egyéni érdekkel bír; az egyéni tulajdonságok közül csak azok a tulajdonképen geometriaiak, melyek a főcsoport változtatásainál megmaradnak. Ez az itt egy kissé határozatlanul fogalmazott gondolat a tárgyalás további folyamában világosabban fog kidomborodni.

Távolítsuk el most a mathematikailag lényegtelen érzéki képet és ne lássunk a térben egyebet, csak egy többszörösen, — vagyis, ha a pontot tekintjük térelemnek, — háromszorosan kiterjedt sokaságot. A térbeli transzformácziók analogiája szerint itt is beszélünk a sokaság transzformáczióiról; ezek is csoportot alkotnak. Csakhogy itt többé nem válik ki, mint a geometriában, az egyik csoport a többi közül különös jelentésével, hanem minden csoport minden másik csoporttal egyenlőjogú. A geometria általánosítása gyanánt tehát a következő probléma áll:

---

egy szabályos testet önönmagával fedésbe hoznak, vagy az a végtelen, de szaggatott sora a helyettesítéseknek, melyek egy sinusvonalat 2π-vel való eltolás által önmagával fedésbe hoznak.

[1] Értelem (Sinn) alatt értem az elrendezés azon tulajdonságát, mely a szimmetrikus ábra (a tükörkép) különbségét okozza. Egymásutánra nézve különbözik pl. a jobbra és balra csavart csavarvonal.

[2] Hogy ezek a transzformácziók csoportot képeznek, fogalmilag szükséges

Adva van egy sokaság és benne egy transzformácziócsoport; megvizsgálandók a sokasághoz tartozó alakzatoknak oly tulajdonságai, melyek a csoport transzformácziói mellett nem változnak.

Támaszkodván a modern kifejezésmódra, a melyet ugyan csak a linearis transformácziók csoportjára szoktak vonatkoztatni, így is mondhatjuk:

Adva van egy sokaság és benne egy transzformácziócsoport. Fejtsük ki a csoportra vonatkozó invariáns elméletét.

Ez az általános probléma, mely nemcsak a közönséges geometriát, hanem az itt említendő újabb geometriai módszereket és a tetszőlegesen kiterjedt sokaságok különböző módú tárgyalásait is magában foglalja. Különösen kiemelendő az az önkény, a melylyel az adjungálandó transzformácziócsoport választásánál eljárhatunk és az imént fogalmazott probléma követeléseinek megfelelő elméleteknek ilyen értelemben vett egyenlő jogosultsága.

2. §.

Oly transzformácziócsoportok, melyek közül az egyik a másikat magában foglalja, egymásután adjungáltatnak. A geometriai kutatás különböző tipusai és kölcsönös viszonyuk.

Mivel a térbeli dolgok geometriai tulajdonságai a főcsoport *minden* transzformácziója mellett változatlanok maradnak, nincs értelme ezeknek oly tulajdonságait kutatni, melyek ezeknek a transzformáczióknak csak egy része mellett maradnak változatlanok. Ez a kérdés azonban — bár csak formailag is — jogossá válik, mihelyt a térbeli elemeknek vonatkozását bizonyos szilárdaknak képzelt elemekhez vizsgáljuk. Tekintsük pl. úgy, mint a gömbháromszögtanban, a térbeli dolgokat egy pont kitüntetésével. Akkor feladatunk többé nem az, hogy maguknak a térbeli dolgoknak invariáns tulajdonságait kutassuk a főcsoport adjunkcziója mellett, hanem annak a rendszernek invariáns tulajdonságait, melyet a térbeli dolgok az adott ponttal képeznek. De e követelést így is fejezhetjük ki: vizsgáljuk maguknak a térbeli alakzatoknak oly tulajdonságait, melyek a főcsoport csak ama transzformáczióinál maradnak változatlanul, melyeknél az adott pont szilárd marad. Más szavakkal: Mindegy, akár a térbeli alakzatokat vizsgáljuk és az adott pontot hozzájuk illesztjük, akár pedig mindennemű hozzáillesztés nélkül a főcsoportot ama benne foglalt csoporttal helyettesítjük, melynek transzformácziói az adott pontot nem változtatják meg.

Ezt az elvet a következőkben gyakran fogjuk alkalmazni és azért már most is általánosan akarjuk formulázni; talán így:

Adva legyen egy sokaság és tárgyalásához egy reá vonatkozó transzformácziócsoport; feladatunk legyen a sokaság alakzatainak tulajdonságait vizsgálni egy adott alakzatra nézve. Akkor kétfélekép járhatunk el:

vagy az alakzatok rendszeréhez az adottat hozzá illesztjük és azután kutatjuk a kibővített rendszer tulajdonságait az adott csoport értelmében;

vagy a rendszert nem bővítjük ki, de a tárgyalásnál alapul vett transzformácziókból csak azokra szorítkozunk, a melyek az adott alakzatot változatlanul hagyják. (Ezek a transzformácziók szükségkép ismét csoportot adnak).

Foglalkozzunk most a fejezet élén kitűzött kérdés forditottjával, mely eleve érthető. Kutatjuk a térbeli dolgok ama tulajdonságait, melyek egy oly transzformáczió-csoportnál maradnak meg változatlanul, a mely a főcsoportot magában foglalja. Minden ily kutatásnál talált tulajdonság magának a tárgynak géometriai tulajdonsága, de e tétel fordítva nem áll. A megforditásnál ellenkezőleg az előbb előadott elv jut érvényre, csakhogy a főcsoport most a kisebb csoport helyére lép.

Tehát a következőket nyerjük:

Hogyha a főcsoportot egy ezt felölelő csoporttal helyettesítjük, a geometriai tulajdonságoknak csak egy része marad meg. A többiek többé nem mint maguknak a térbeli tárgyaknak tulajdonságai szerepelnek, hanem mint ama rendszernek tulajdonságai, mely származik, ha az adott térbeli tárgyakhoz egy kitüntetett alakzatot hozzáillesztünk.

E kitünő alakzat, a mennyire *egyáltalában határozott,* azáltal értelmezhető, hogy — szilárdnak képzelve —, a térnek az adott csoport transzformácziói közül még csak a főcsoport transzformácziói tengedi meg.*

Ezen a tételen alapszik az itt tárgyalandó újabb geometriai irányoknak sajátossága és viszonyuk az elemi módszerhez. Épen azzal jellemezhetők, hogy a vizsgálat alapjául a főcsoport helyett a térbeli változtatások egy bővített csoportját teszik. Kölcsönös viszonyukat, a menny ben csoportjaik egymást magukban foglalják, egy megfelelő tétel határozza meg. Ugyanez áll a többszörösen kiterjedt sokaságoknak itt megvizsgálandó különböző tárgyalási módjairól. Meg akarjuk ezt már most az egyes módszerekre nézve mutatni, mi által az utolsó két fejezetben felállított tételek világosabbakká válnak azáltal, hogy konkrét esetekre alkalmazzuk.

3. §.

A projektiv geometria.

Minden térbeli átalakítást, mely nem épen a főcsoporthoz tartozik, alkalmazhatunk arra, hogy ismert alakzatok tulajdonságait új alakzatokra átvigyük. Így értékesítjük a sik géometriáját a sikra leképezhető felületek géometriájára; és így következtettek már jóval a tulajdonképeni projektiv géometria keletkezése előtt egy adott idom tulajdonságaiból egy belőle vetítés útján származott idom tulajdonságaira. De maga a projektiv geometria mint ilyen csak akkor lett meg, midőn hozzászoktak, hogy az eredeti idomot azonosnak tekintsék minden belőle vetítés által származott idommal, és midőn a vetítésnél fennmaradó tulajdonságokat úgy mondották ki, hogy a vetítéstől való függetlenségük nyilvánvalóvá lett.

S ezzel az *1. §. értelmében a tárgyalás alapját a projektiv*

* Ily alakzatot pl. úgy állítunk elő, hogy egy tetszőleges kezdőelemre, mely az adott csoport egy transzformácziója által sem vezethető vissza önmagába, a főcsoport transzformáczióit alkalmazzuk.

átalakítások összessége tette és így állott elő a különbség közönséges és projektiv geometria között.

A fejlődésnek az itt leirthez hasonló menete mindennemű térbeli transzformácziónál képzelhető; erre később még többször visszatérünk. A fejlődésnek ez a menete a projektiv geometrián belül is két irányban ment végbe. A felfogás először is azáltal tágult, hogy az alapul vett változtatások csoportjába felvették a dualisztikus átalakításokat. A mai szempontból két egymással dualisztikusan szemben álló idomot többé nem tekintünk különböző, hanem lényegesen ugyanannak az idomnak. További lépést tettek azzal, hogy az alapul vett csoportot kibővítették a megfelelő imaginárius transzformácziókkal. Ez a lépés feltételezi, hogy előbb a tulajdonképeni térelemek körét a képzetesek hozzávételével kibővítsük, ép úgy, mint a dualisztikus átalakítások felvétele maga után vonja, hogy a pontot és síkot mint térelemeket egyidejűleg felvegyük az alapul vett csoportba.

E hely nem alkalmas arra, hogy rámutassunk az imaginárius elemek bevezetésének czélszerűségére, mint a melyeknek révén érjük el csak a tér geometriájának szoros csatlakozását az algebrai operácziók területével. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a bevezetés oka épen algebrai operácziók vizsgálatában és nem a projektiv és dualisztikus átalakítások csoportjában van.

A mint az utóbbiaknál valós transzformácziókra szorítkozhatunk, mert már a valós kollineácziók és dualisztikus transzformácziók magukban csoportot alkotnak, épp úgy imaginárius térelemeket vezethetünk be, ha nem is állunk projektiv álásponton és be is kell őket vezetnünk, ha elvileg algebrai alakzatokat vizsgálunk.

A megelőző fejezet általános tétele szabja meg, hogyan kell projektiv szempontból a metrikus tulajdonságokat felfognunk. Úgy fogjuk fel őket, mint projektiv vonatkoztatásokat a végtelenben fekvő gömbi körhöz*, egy oly alapelemhez, mely csak a főcsoport

* E felfogás Chasles egyik legszebb sikere; a tulajdonságok felosztása helyzeti és metrikusokra, mely a projektiv geometria élén szokásos, csak így nyer szabatos tartalmat.

transzformáczióinál megy át önönmagába, a projektiv csoport egyéb transzformáczióinál pedig nem. Az így egyszerűen kimondott tételt lényegesen ki kell még egészitenünk, a mi a közönséges felfogás korlátozásának valós térelemekre és valós transzformácziókra felel meg. Hogy ez álláspontnak megfeleljünk, a gömbi körhöz még a valós térelemek (pontok) rendszerét kell hozzácsatolnunk; az elemi geometria tulajdonságai projektiv szempontból vagy maguknak az idomoknak tulajdonságai, vagy vonatkozásaik a valós elemek rendszeréhez, vagy a végtelenben fekvő gömbi körhöz, vagy mind a kettőhöz.

Megemlékezünk itt még arról a módról is, a hogy STAUDT «Geometrie der Lage» cz. művében a projektiv géometria rendszerét felépíti, a mely arra szorítkozik, hogy csak az összes valós projektiv és dualisztikus átalakítások csoportját veszi alapul*. Ismeretes, hogyan ragad ő ki a szokott szemléleti anyagból csupán olyan mozzanatokat, a melyek projektiv átalakításoknál is fennmaradnak. Hogyha át akarnánk térni metrikus tulajdonságok vizsgálatára is, akkor ezeket egyenesen mint a gömbi körhöz való vonatkozásokat kell bevezetnünk. Az így tökéletesített eszmemenet a mi tárgyalásainkra nézve azért is nagyjelentőségű, mert a geométria megfelelő felépítése minden egyes még közlendő módszer értelmében lehetséges.

4. §.

Átvitel leképezés segítségével.

Mielőtt az elemi és projektiv módszerek mellé sorakozó módszereket tovább fejtegetnők, egynehány általános megfigyelést akarunk kifejteni, melyek a következőkben mindig újra fordulnak elő és a melyekhez az eddig érintett anyag már elegendő sok példát szolgáltat. Ezekre a fejtegetésekre fog a jelen és a következő fejezet vonatkozni.

Tegyük fel, hogy egy bizonyos A sokaságot megvizsgáltunk egy

---

* Az imaginárius átalakításokat v. STAUDT csak a «Beiträge zur Geometrie der Lage» cz. munkájában vette alapul.

bizonyos B csoport alapul vétele mellett. Ha már most az A sokaságot akármilyen transzformáczió által egy A' sokasággá változtatjuk át, akkor a B csoportból, mely az A sokaságot önmagába transzformálta, egy B' csoport lesz, melynek transzformácziói A're vonatkoznak. Akkor természetes elv, *hogy az A tárgyalása B alapul vétele mellett megadja az A' tárgyalását B' alapul vétele mellett*; azaz a mely tulajdonsága az A valamely alakzatának van a B csoportra vonatkozólag, ugyanaz a tulajdonsága meg van a megfelelő A' alakzatnak a B' csoportra vonatkozólag.

Jelentsen A pl. egy egyenes vonalat, B jelentse a háromszorosan végtelen sok lineáris transzformácziót, melyek ezt önmagába visszavezetik. Az A tárgyalási módja ugyanaz, melyet az újabb algebra a binär alakok elméletének nevez. Ha most az egyenes vonalat a síknak egy kúpszeletére ennek egy pontjából vetítjük, akkor az egyenesnek B önmagába való lineáris transzformáczióiból lesznek a kúpszeletnek B' önmagába való lineáris transzformácziói, azaz a kúpszeletnek ama változtatásai, melyek a sík ama lineáris transzformáczióinak felelnek meg, a melyek a kúpszeletet önmagába átvezetik.

Ámde a 2. fejezet elve szerint * mindegy: akár a geometriát egy kúpszeleten vizsgáljuk, hogyha a kúpszeletet szilárdnak tekintjük és a síknak csak ama lineáris transzformáczióira vagyunk tekintettel, a melyek a kúpszeletet önönmagába visszavezetik, akár a geometriát a kúpszeleten tanúlmányozzuk, úgy, hogy általában a sík lineáris transzformáczióit tekintjük és a kúpszeletet vele együtt változtatjuk. A kúpszeleten fekvő pontrendszereken észlelt tulajdonságok tehát a szó közönséges értelmében projektivek. Ez utóbbi meggondolás összefűzése az ép levezetett eredménynyel adja tehát a következőket:

*a binär alakok elmélete és a pontrendszerek projektiv geometriája egy kúpszeleten ugyanaz; azaz minden binär tételnek megfelel egy-egy tétel ilyen pontrendszerekről és fordítva.***

---

* Ha úgy tetszik, az elv itt bővített alakban van alkalmazva.

** A síkbeli kúpszelet helyett hasonló sikerrel bevezethetünk egy harmadrendű térgörbét vagy általában n dimenzió mellett valami megfelelőt.

Más, e megfontolások szemléltetésére alkalmas példa a következő: Hogyha egy másodrendü felületet egy síkra stereografikus úton vetítünk, akkor a felületen *egy* alappont lép fel, a vetítési pont; a síkban két ily pont van: a vetítési ponton átmenő alkotónak képei. Könnyen kimutathatjuk már most a következőket: a sík ama lineáris transzformácziói, melyek ennek két alappontját változatlanul hagyják, a leképezés révén átmennek a másodrendű felületnek amaz önmagába való transformáczióiba, melyek a vetítési pontot változatlanul hagyják. A felületnek lineáris transformácziói önmagába azok a változtatások, midőn a térben olyan lineáris transformácziókat végzünk, melyek a felületet önmagával fedésbe hozzák. Így a sík projektiv vizsgálata két pont alapul vétele mellett és a felület megvizsgálása egy pont alapul vétele mellett azonos. Az előbbi — a mennyiben a képzetes elemeket figyelembe vesszük — semmi egyéb, mint a sík vizsgálata az elemi geométria értelmében. Mert a síkbeli transzformácziók főcsoportja épen azokból a lineáris átalakításokból áll, melyek egy pontpárt (a végtelenben fekvő körpontokat) változatlanul hagynak. Így végre a következő tételhez jutunk:

A sík elemi geometriája és egy másodrendü felület projektiv vizsgálata egy pontjának hozzávételével ugyanaz.

Ezeket a példákat tetszés szerint szaporíthatók*; a mostani kettőt azért választottuk, mert a következőkben még alkalmunk lesz rájuk visszatérni.

5. §.

A térelem választása tetszőleges. A Hesse-féle átviteli elv. A vonalgeometria.

Az egyenes, sík, tér vagy általában bármely megvizsgálandó sokaság eleme gyanánt a pont helyett bármely a sokaságban foglalt alakzatot használhatunk: a pontcsoportot, esetleg a görbét, a felületet stb. Minthogy a tetszőleges parameterek száma, melyektől

* Ld. Über Liniengeometrie und metrische Geometrie, Math. Annalen V. kötet.

ezeket az alakzatokat függésbe hozzuk, előzetesen nincs megállapítva, az elem választása szerint vonal, sík, tér stb. tetszőleges számú dimenzióval bírhatnak. *De mindaddig, míg a változtatásoknak ugyanaz a csoportja képezi a geometriai kutatás alapját, addig a geometria tartalma is változatlan marad:* azaz: a mely tételt valamely térelem egyik felvétele mellett nyertünk, az fennáll tetszőleges más felvétel mellett is és csak a tételek elrendezése és összefüggése változik meg.

Lényeges tehát a transzformáczió-csoport; a dimenziók száma, melyet egy sokaságnak tulajdonítani akarunk, másodrendű dolog. Ennek az észrevételnek összefűzése az előbbi fejezet elvével a szép alkalmazásoknak egész sorát adja; ezek közül egynehányat itt akarunk kifejteni, hiszen ezek minden hosszú fejtegetésnél világosabban mutatják be az általános elmélkedés értelmét.

A megelőző fejezet értelmében a projektiv géometria az egyenesen (a binär alakok elmélete) azonos a projektiv geometriával a kúpszeleten. Utóbbin tekintsük most elem gyanánt a pont helyett a pontpárt. A kúpszelet pontpárjainak összességét azonban egyértelműen vonatkoztathatjuk a sík egyeneseinek összességére olyként, hogy minden egyenest mellérendelünk annak a pontpárnak, melyben a kúpszeletet találja. Eme leképezés mellett a kúpszeletnek önönmagába való lineáris transzformácziói átmennek az egyenesekből alkotott siknak ama transzformáczióiba, melyeknél a kúpszelet nem változik. Akár az utóbbiakból álló csoportot tekintsük, akár a sík lineáris transzformáczióit vegyük alapul és a sík megvizsgálandó alakzatjai mellé a kúpszeletet rendeljük, ez a 2. §. alapján egyre megy. Összefoglalván mindezeket, a következő tételt nyerjük:

A binär alakok elmélete és a síknak projektiv geometriája egy kúpszelet alapul vétele mellett azonos tartalmú.

Mivel végre a sík projektiv geométriája egy kúpszelet alapul vétele mellett a csoport egyenlősége miatt azonos ama projektiv mértékgeometriával, mely a síkban egy kúpszeletre alapítható * állíthatjuk, hogy:

* V. ö. V. jegyzet.

A binär alakok elmélete és a sík általános projektiv mértékgeometriája ugyanaz.

A síkbeli kúpszelet helyett a megelőző fejtegetésben harmadrendű térgörbét vehetünk, de ezt itt mellőzzük. A síknak, térnek vagy egy tetszőlegesen kiterjedt sokaságnak geometriái közötti összefüggés lényegében megfelel a Hesse- átviteli elvnek (Crelle Journal 66. kt.)

Egészen hasonló példát ad a tér projektiv geometriája vagy más szavakkal a quaternär alakok elmélete. Hogyha térelemül az egyenest választjuk és úgy mint a vonalgeometriában, hat homogén koordinátával határozzuk meg, melyek között egy másodrendű feltételi egyenlet áll fenn, akkor a tér lineáris és dualisztikus transzformácziói mint a független hat változónak lineáris transzformácziói szerepelnek, melyek a feltételi egyenletet önönmagába vezetik át. Az előbbiekhez hasonló meggondolások a következő tételhez vezetnek:

*A quaternär alakok elmélete ugyanaz mint a projektiv mértékmegállapitás egy hat homogen változó által segítségével sokaságban.**

Az előbbi fejtegetésekhez még két megjegyzést fűzök, melyek közül az első implicite az előbbiekben már benfoglaltatik, de a tárgy, melyre vonatkozik, könnyen félreérthető és ezért bővebben fejtjük ki.

A mint más és más alakzatokat vezetünk be térelemekül, a térnek különböző dimenziói is lesznek. Ha azonban a szokásos (elemi vagy projektiv) felfogás módjához ragaszkodunk, akkor előre van megadva az a csoport, melyet a többszörösen kiterjedt sokaság számára alapul kell vennünk ; ez t. i. a főcsoport, illetőleg a projektiv átalakítások csoportja. Ha más csoportot vennénk alapul, el kellene térnünk a közönséges, illetőleg projektiv felfogástól. Helyes tehát ugyan, hogy a térelemek alkalmas választása mellett a tér tetszőleges dimenziójú sokaságokat képvisel, de mindég hozzá kell ten-

---

* V. ö. VI. jegyzet és Klein «Über die sogenannte Nicht-Euklideische Geometrie». Math. Ann. VI. kötet.

nünk, *hogy e képviseltetésnél vagy eleve egy bizonyos csoportot kell a sokaság tárgyalásának alapjául venni, vagy ha ezzel a csoporttal rendelkezni akarunk, geometriai felfogásunkat kell megfelelően alkalmaznunk.* E megjegyzés nélkül pl. következőleg alkothatnánk vonalgeometriát:

Az egyenesnek a vonalgeometriában hat koordinátája van; ugyanannyi együtthatója van a kúpszeletnek a síkban. A vonalgeometria képe lenne tehát a geometria egy oly kúpszeletrendszerben, melyet nyerünk, ha ezt a kúpszeletek összességéből az együtthatók közötti quadratikus reláczió alapján választjuk ki. Ez helyes, a mint a sík-geometria alapjául ama transzformácziók összességét vesszük, melyek a kúpszelet együtthatóinak oly lineáris átalakításai által képviseltetnek, melyek a quadratikus feltételi egyenletet önönmagába viszik át. Ha azonban a sík geométriának elemi, ill. projektiv felfogásához ragaszkodunk, képet nem kapunk.

A második megjegyzés a következő fogalomalkotásra vonatkozik. Legyen adva a térben egy csoport, pl. a főcsoport és válaszszunk egy térbeli alakzatot, pl. egy pontot, egy egyenest, vagy akár egy ellipszoidot és alkalmazzuk erre a főcsoport minden transzformáczióját, akkor egy oly többszörösen végtelen sokaságot nyerünk, mely általában annyi dimenziós, ahány tetszőleges parameter van a csoportban. A dimenziók száma csak akkor lesz kisebb, ha az alapul vett alakzatot a csoportnak végtelen sok transzformácziója vezeti önmagába vissza. Minden így előállított sokaságnak, tekintettel az előállító csoportra, *test** legyen a neve. Ha már most a testet a csoport értelmében akarjuk megvizsgálni és bizonyos alakzatokat mint térelemeket kitüntetni, a nélkül, hogy egyenlő jogú elemek különböző minőségben tünjenek fel, *akkor a térelemeket láthatólag úgy kell választanunk, hogy sokaságuk vagy maga is képezzen testet vagy testekre felbontható legyen.*** Ezt majd a 9. §-ban fog-

* A test elnevezés Dedekind mintájára történt, a ki a számelméletben oly számtartományokat nevez testeknek, melyek adott elemekből adott operácziók által származnak.

** [A szövegben nincsen eléggé kiemelve, hogy a felvett csoport u. n. kivételes alcsoportokkal birhat. Ha valamely geométriai idom változatlanul marad juk alkalmazni. A test fogalma a záró fejezetben rokon fogalmakkal újra fog szőnyegre kerülni.

6. §.

A reciprok radiusok geometriája. $x+iy$ kifejezés értelmezése.

E fejezettel visszatérünk a geométriai kutatás különböző módszereinek megbeszélésére, melyet a 2. és 3. fejezetben megkezdettünk.

A projektiv geométria fejtegetései mellé állíthatjuk sok tekintetben a geométriai megfontolások egy osztályát, mely a reciprok radiusokkal való átalakítást folyton alkalmazza.

Ide tartoznak az u. n. cyclidák és anallagmitikus felületekről, az orthogonalrendszerek általános elméletéről és a potencziálról szóló elméletek. Az ezekben foglalt vizsgálatokat is ép úgy, mint a projektiveket egy külön geometriába lehetne összefoglalni, *mely mint csoportot alapul venné amaz átalakítások összességét, melyeket olyként nyerünk, hogy a főcsoportot a reciprok radiusokkal való transformácziókkal kapcsoljuk össze.* Ez bizonyára csak azért nem történt még meg, mert az említett elméleteket eddig összefüggésben nem állították össze. Az ez irányban dolgozó szerzőknek egy ily módszeres felfogás bizonyára már szemük előtt lebeghetett.

A párhuzam a reciprok radiusok geometriája és a projektiv geometria között, mihelyt egyszer felvetettük a kérdést, azonnal önmagától adódik ki és így csak egész általánosságban a következő pontokra akarunk figyelmeztetni:

A projektiv geometriában elemi fogalmak a pont, egyenes és sík; kör és gömb a kúpszelet, ill. másodrendű felület spezciális

---

egy kivételes alcsoport minden müvelete mellett, ugyanaz áll mindazokra nézve, melyek ez idomból az egész csoport müveletei által folynak, tehát a belőle előálló test minden elemére nézve. Már most egy így képezett test teljesen alkalmatlan a csoport míveleteinek képviselésére. Tehát csak azokat a testeket kell a szövegben számon tartani, melyek oly térelemekből alakulnak, melyek a felvett csoport semmi kivételes alcsoportjánál sem maradnak változatlanok.]

esetei. Az elemi geometria végtelen távolja mint sík jelenik meg; az az alapidom, melyre az elemi geometria vonatkozik, egy végtelen távol fekvö, képzetes kúpszelet.

A reciprok radiusok geometriájában pont, kör és gömb az elemi fogalmak. Egyenes és sík az utóbbiaknak speczialis esetei, melyekre nézve jellemző, hogy egy — a módszer értelmében különben nem nevezetes — pontot, a végtelen fekvő pontot tartalmazzák. Az elemi geometria ebből úgy fejlődik, hogy e pontot szilárdnak képzeljük.

A reciprok radiusok geometriáját oly szempontból is tekinthetjük, hogy ebből kiindulva a binär alakok elmélete és a vonalgeometria mellé állítható; erre elégséges az utóbbiakat úgy tárgyalni a mint ez az utolsó §-ban történt. E czélból fejtegetéseinket először a síkra szorítjuk és így a radius vectoroknak geometriáját is első sorban csak a síkra vonatkozólag tárgyaljuk.

Már megemlékeztünk arról az összefüggésről, mely a sík elemi geometriája és ama másodrendű felület projektiv geometriája között fennáll, melynek egy pontját különösen kiemeljük. Hogyha ettől a ponttól eltekintünk és csak a projectiv geometriát a felületen önmagát tekintjük, akkor ez a reciprok radiusok síkbeli geometriájának képét adja. Ugyanis könnyen meggyőződhetünk arról,* hogy a reciprok radiusok transzformácziócsoportjának a síkban megfelel — a másodrendű felület leképezése folytán — az utóbbi önmagába való linearis transzformáczióinak összessége. Tehát

A reciprok radiusok geometriája a síkban és projektiv geometria egy másodrendü felületen ugyanaz,

és megfelelőleg:

A reciprok radiusok geometriája a térben azonos egy oly sokaság projektiv tárgyalásával, melyet egy öt homogen változó között fennálló quadratikus egyenlet képvisel.

A térbeli geométriát tehát a reciprok radiusok geometriája épen oly vonatkozásba hozza egy négy dimenziós sokasággal, mint a melybe a vonalgeometria hozza egy öt dimenzióssal.

---

* V. ö. KLEIN: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Ann. V. kt.

A reciprok radiusok geométriája a síkban még más irányban is enged meg érdekes ábrázolást, illetve alkalmazást, a mennyiben csak valós transzformácziókra tekintünk. Hogyha t. i. egy $x+iy$ complex változót a szokott módon a síkban ábrázolunk, akkor lineáris transformácziónak megfelel a reciprok radiusok csoportja, a már említett megszorítással* a valósra.

Ámde egy tetszőleges lineáris transzformáczióknak így alávetett complex változó függvényeinek vizsgálata nem egyéb, mint a binär alakok elmélete, némileg módosított ábrázolásban. Tehát:

A binär alakok elmélete a reciprok radiusok geometriája által úgy nyer ábrázolást a valós síkban, hogy a változók complex értékei is képviseltetnek.

A síkról, hogy a projektiv átalakítások szokottabb körébe jussunk, felemelkedünk a másodrendű felületre. Minthogy a síknak csak valós elemeit vizsgáltuk, a felület választása nem közömbös; világos, hogy egyenesvonalú felületet nem választhatunk. Különösen gömbfelületnek tekinthetjük, — a mint az különben a komplex változók értelmezésénél szokás — és ekkor a következő tételhez jutunk:

A complex változók binär alakjainak elméletével a valós gömbfelület projektiv geometriája analog.

Egy utójegyzetben bővebben kifejtettem, mily szépen adja e kép a binär kubikus és biquadratikus alakok elméletét.**

---

* [A szöveg kifejezése nem szabatos. Mind a $z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (a hol $z'=x'+iy'$ és $z=x+iy$) lineáris transzformácziók a reciprok radiusok csoportjában csak ama transzformáczióknak felelnek meg itt, melyek a szögeket nem változtatják, (melyek által a képzetes körpontok nem permutálódnak egymás között.) Hogy a reciprok radiusok csoportját egészen felöleljük, adjungálnunk kell a következő nem kevésbbé fontos transzformácziókat $z'=\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ a hol $z'=x'+iy'$ még, de $\bar{z}=x-iy$.]

** Partielle Differentialgleichungen und Complexe. Math. Ann. V.

7. §.

Az előbbiek kibővítése. Lie gömbgeometriája.

A binär alakok elméletéhez, a reciprok radiusok geometriájához és a vonalgeométriához, — melyeket az előbbiekben egymás mellé rendeltünk úgy, hogy csak a változók számában különböznek, — fűzhetünk bizonyos megjegyzéseket, melyeket most ki akarunk fejteni. Ezekkel egyrészt ujabb példákon ki akarjuk mutatni, hogy az adott tartományok tárgyalási módját meghatározó csoport tetszőlegesen bővithető, másrészt különösen Lie ujabb fejtegetéseit * akarjuk az itt előadottakra vonatkoztatva ismertetni. Mi itt Lie gömbi geometriájához nem Lie utján fogunk eljutni, a mennyiben Lie vonalgeometriai képzetekből indul ki, hanem hogy jobban a megszokott geometriai szemléletekhez ragaszkodjunk és az előbbiekkel összefüggésben maradjunk, a változóknak kisebb számát fogjuk feltételezni. A tárgyalásokról maga Lie (Göttinger Nachrichten, 1871) emelte ki, hogy a változók számától függetlenek. Ezek a fejtegetések a kutatások ama nagy körébe tartoznak, melyek a quadratikus tetszőleges sok változós egyenletek projektiv vizsgálatával foglalkoznak; ezeket már sokszor érintettük és sokszor fogunk még rájuk visszatérni.

Kiindulok abból a kapcsolatból, melyet a stereografikus projekczió a valós sík és a gömbfelület között létesit. Már az 5. §-ban a sík geometriáját összefüggésbe hoztuk a geometriával egy kúpszeleten úgy, hogy a sík egyenese mellé rendeltük azt a pontpárt, melyben az egyenes a kupmetszetet metszi. Hasonlóképen találhatunk összefüggést a térgeometria és a gömbön levő geometria között, ha a tér minden síkja mellé rendeljük azt a kört, melyben az a gömböt metszi. A geometriát a gömbön most stereografikus projekczióval a gömbről leképezzük a síkra, mi által minden kör egy körbe megy át; így egymásnak megfelelnek:

1) a tér geometriája, melynek eleme a sík, csoportja azok a li-

* V. ö. VII. jegyz.

neáris transzformácziók, melyek a gömböt önönmagába viszik át, és

2) a sík geometriája, melynek eleme a kör, csoportja a reciprok radiusok csoportja.

Az előbbi geometriát most két irányban akarjuk általánosítani az által, hogy csoportja helyébe általánosabbat teszünk. A bővítés eredménye azután egyszerűen átvihető a sík geometriára.

A síkokból álló tér ama lineáris transzformácziók helyett, melyek a gömböt önmagába viszik át, választhatjuk vagy a tér ama lineáris transzformáczióinak összességét, vagy pedig a tér ama síktranszformáczióinak összességét, melyek (egy még meghatározandó értelemben) a gömböt változatlanul hagyják; az első esetben eltekintünk a gömbtől, a másodikban az alkalmazandó transzformácziók lineáris jellegétől. Az első általánosítás könnyebben érthető és ezért először vele és jelentőségével a sík geometriára nézve fogunk foglalkozni; a másodikra azután térünk vissza és ennél előbb a megfelelő legáltalánosabb transzformácziót kell meghatároznunk.

A tér lineáris transzformácziói síksorokat és síkpontokat (Ebenenbündel) megint ilyenekbe visznek át. De ha átvisszük a gömbre, akkor a síksor körsort ad, azaz egyszeresen végtelen sok kört közös metszési pontokkal; a síkpont ad egy körpontot (Kreisbündel), azaz kétszeresen végtelen sokaságát oly köröknek, melyek merőlegesek arra a körre, melynek síkja a síkpont közös pontjának poláris síkja. A tér lineáris transzformáczióinak tehát a gömbön és továbbá a síkban oly körtranszformácziók felelnek meg, melyeknek jellemző tulajdonsága, hogy körsorokat (Kreisbüschel) és körpontokat (Kreisbündel) ugyanolyanokba vezetnek át.* *Az a sík geometria, mely az így nyert transzformácziók csoportját használja, a közönséges projektiv térgeometria képe.* A sík eleme ebben a geometriában nem lesz pont, mert a pontok a választott transzformácziócsoportra nézve nem képeznek testet (5. §.), hanem a kör.

Az említett második bővítésnél először a megfelelő transzformá-

---

* Ezeket a transformácziókat GRASSMANN használta alkalmilag. (Ausdehnungslehre 1862, p. 278).

czió-csoport természetének kérdését kell elintéznünk. Oly siktranszformácziókat kell találnunk, melyek minden oly sikpontból, melynek középpontja a gömbön fekszik (melynek tengelye a gömb érintője), — megint ily sikpontot alkotnak. A kifejezés rövidebb módja kedvéért a kérdést először dualisztikusan meg akarjuk forditani és azonfelül a dimenziók számát is egygyel lejebb szállitani; kutatni fogjuk tehát a siknak oly ponttranszformáczióit, melyek az adott kúpszelet minden érintőjéből ismét érintőt alkotnak. E czélból a sikot rajta fekvő kupszeletével tekintsük egy oly másodrendű felület képének, a melyet egy nem rajta fekvő pontból úgy a sikra projiciáltunk, hogy az illető kupszelet ábrázolja az átmeneti görbét. A kupszelet érintőinek megfelelnek a felület alkotói és kérdésünket visszavezettük a következőre: keressük a felület oly ponttranszformáczióit önmagába, melyeknél az alkotók alkotók maradnak.

Ily transzformáczió végtelen sok van ugyan: hiszen a felület pontját csak a kétféle alkotók metszésének kell tekinteni és minden egyenes rendszert önönmagába transzformálni. De e transzformácziók közül ki akarjuk választani különösen a lineárisokat. Hogyha ugyanis nem felülettel volna dolgunk, hanem egy oly többszörösen kiterjedt sokasággal, melyet egy quadratikus egyenlet képvisel, akkor csak a lineáris transformácziók maradnának meg.*

Ha a felületeknek emez önönmagába való lineáris transformáczióit (nem stereografikus) vetités által átvisszük a sikra, kétértékű pont transzformácziókat nyerünk, melyeknél az átmeneti görbét képező kúpszelet minden érintője ugyan ismét érintővé válik, minden egyéb egyenes azonban általánosságban oly kúpszeletté, mely az átmeneti görbét kétszeresen érinti. Ezt a transzformáczió-csoportot alkalmasan jellemezhetjük, hogyha az átmeneti kúpszeletre projektiv mértékmegállapitást alapitunk. Akkor a transzformácziók oly tulajdon-

* Hogyha a sokaságot sterografikus módon projiciáljuk, nyerjük ezt az ismeretes tételt: Többszörösen kiterjedt tartományban (már a térben is) nincsenek más konform ponttranszformácziók, mint azok, melyek a reciprok radiusok csoportjában vannak. A sikban azonban tetszőlegesen sok más is van. V. ö. Lie emlitett dolgozatait.

ságuak, hogy oly pontokat, melyeknek egymástól való távolságuk a mértékmegállapitás értelmében zérus vagy távolságuk egy másik ponttól állandó, megint ily pontokká alakit át.

Mindeme fejtegetések átvihetők tetszőleges sok változóra, különösen tehát arra a kérdéses esetre is, mikor a gömbről és a sikról mint elemről volt szó. Ebben az esetben az eredmény annál szemlélhetőbb alakot nyer, mert két sik alkotta szög a gömbre vonatkoztatott projektiv mértékmegállapitás értelmében egyenlő azzal a szöggel, melyet metszési köreik a gömbbel a közönséges értelemben egymással képeznek.

Tehát a gömbön és továbbá a sikon a körtransformáczióknak egy oly csoportját nyerjük, melyek *egymást érintő (egymással 0° szöget képező) köröket és egy másik kört egyenlő szög alatt metsző köröket ép oly körökbe visznek át.* Ez a csoport magában foglalja a gömbön a lineáris transzformácziókat, a sikban a reciprok radiusok csoportjának transzformáczióit.*

Az erre a csoportra alapitandó körgeometria analogonja a Lie tervezte gömbi geometriának, mely a felületek görbületének vizsgálatánál kiváló jelentőségű. Ugyanabban az értelemben magába foglalja a reciprok radiusok geometriáját, mint ez az elemi geometriát.

Az így nyert kör- (ill. gömb) transzformácziók különösen oly tu-

---

* [A következő képletek megvilágítják majd a szöveg fejtegetéseit.

Legyen $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$ ama gömb egyenlete közönséges tetraéderkoordinátákban, melyet stereografikus uton a sikra vonatkoztatunk. Az x-ek, melyek eme felteteli egyenletnek megfelelnek, egyuttal tetracyklikus koordináták jelentőségét nyerik a sikban és

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0$$

lesz a kör általános egyenlete a sikban. E kör sugara $\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}$, legyen $=iu_5$. Most tekinthetjük a köröket mint a sik elemeit; akkor a reciprok radiusok csoportja lesz az $u_1u_2u_3u_4$ ama lineáris homogén transzformáczióinak összessége, a melyeknél $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$ egy állandó szorzótól eltekintve önmagába megy át. A legáltalánosabb csoport, mely Lie gömbi geometriájának megfelel, ama öt u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 változó linearis transz formáczióiból áll, melyek, — egy állandó szorzótól eltekintve —, $(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2)$ kifejezést önmagába viszik át.]

lajdonságuak, hogy egymást érintő köröket (gömböket) ugyanolyanokba vezetnek át. Hogyha mind a görbéket (felületeket) mint köröknek (gömböknek) enveloppejait tekintjük, akkor egymást érintő görbék (felületek) mindig ismét olyanokba mennek át transzformáczió által. A kérdéses transzformácziók tehát a később általánosan tárgyalandó érintési transformácziók osztályába tartoznak, mely osztályban pontalakzatoknak érintkezése invariáns tulajdonság. A jelen fejezetben tárgyalt körtranszformácziók, melyek mellé analog gömbi transzformácziókat állíthatunk, nem érintési transzformácziók.

Ebben a fejezetben a kétféle tágítást csak a reciprok radiusok geometriájára alkalmaztuk, de természetesen lehetne ugyanezt megfelelő módon vonalgeometriára és általában egy quadratikus egyenlet által jellemzett sokaság projektiv vizsgálatára alkalmazni, amitől itt eltekintünk.

8. §.

Más módszerekről, melyeknek alapja a ponttranszformáczióknak egy csoportja.

Az elemi geometria, a reciprok radiusok geometriája és — a mennyiben a térelem változtatásával járó dualisztikus átalakitásoktól eltekintünk — a projektiv geometria is, mint egyes részek a számos képzelhető vizsgálati módszerek közé tartoznak, melyek ponttransformácziók csoportjait veszik alapúl. Itt csak a következő három módszert akarjuk kiemelni, melyek a nevezettekkel megegyeznek. Ámbár ezek még korántsem fejlődtek ki abban a mértékben, mint a projektiv geometria, önálló tudományszakokká, mégis tisztán kivehetően lépnek fel az ujabb kutatásokban.

[Míg a megelőző példákban oly csoportokról volt szó, melyek korlátolt számú parameterekkel birnak, most az u. n. végtelen csoportok vizsgálatához érkezünk].

1. A raczionális átalakítások csoportja.

Raczionális átalakításoknál jól meg kell különböztetnünk, valjon ezek a tér, illetve sik stb., melyen dolgozunk, *minden* pontjára nézve raczionálisok-e vagy csak egy a tartományban foglalt sokaságra, pl. felületre, vagy görbére nézve azok. Ha az eddigi értelemben akarjuk a térnek vagy síknak egy geometriáját tervezni, csak az elsőket alkalmazhatjuk; az utóbbiak csak akkor birnak az itt adott szempontból jelentőséggel, ha geometriát egy adott felületen vagy görbén akarunk tanulmányozni. Ugyanez a megkülönböztetés áll a mindjárt tárgyalandó analysis situsnál is.

Az eddigi kutatások, itt is, ott is, eddig csak a második fajta transzformácziókkal foglalkoztak. A mennyiben itt nem a geometriát egy görbén vagy felületén kutatták, hanem kriteriumokat kerestek arra nézve, hogy két felület vagy görbe egymásba áttranszformálható-e, ezek a vizsgálatok kilépnek fejtegetéseink köréből.* Az itt felállitott általános schematismus sem foglalja magába a mathematikai kutatatások összességét, hanem csak bizonyos irányokat hoz egységes szempont alá.

A raczionális átalakításoknak egy oly geometriája, mely az első fajta transzformácziókat használná, eddig csak első zsengéiben van meg. Az elsőfokú tartományban, az egyenes vonalon, a raczionális átalakítások azonosak a lineárisokkal és így nem nyujtanak semmi ujat. A síkban persze ismerjük a raczionális (Cremona-féle) transzformácziók összességét és tudjuk, hogy quadratikusok összetételeiből előállithatók. Ismerjük sík görbék invariáns jellegeit is: nemüket (Geschlecht), modulusok létezését; de a síknak tulajdonképeni geometriájává az itt gondolt értelemben ezek a kutatások még nem fejlődtek, a térben az elmélet csak keletkezőben van

* [Mégis, más és pedig a legszerencsésebb módon ide is vonatkoznak, a mit 1872-ben még nem tudtam. Adva lévén egy tetszőleges algebrai alak (görbe felület stb.), vonatkoztassuk azt egy magasabb rendű térre, bevezetvén mint koordinatákat a

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p = du_1 : du_2 : \ldots : du_p$$

viszonyokat, a hol $u_1 u_2 \ldots u_p$ első fajú Abel-féle integrálok (a görbére vonatkoztatva). Nincs egyéb hátra, mint az erre a térre vonatkozó tárgyalásokhoz alapul venni a φ-k lineáris homogén transzformáczióknak csoportját. Lásd Brill, Noether és Weber különböző műveit és ujabb dolgozatomat: Zur Theorie der Abel'schen Functionen (Math. Ann. XXXVI. kt.).]

még. A raczionális átalakítások közül eddig még keveset ismerünk és ezeket arra használjuk, hogy ismeretes felületeket ismeretlenekkel leképezés útján összeköttetésbe hozzunk.

II. Az analysis situs.

Az u. n. analysis situsban keressük a maradandót oly átalakításokkal szemben, melyek végtelen kis nyujtások és hajlítások (Verzerrungen) összetételéből származnak. Itt is meg kell különböztetnünk, valjon az egész tért képzeljük-e mint a transzformácziók mezejét, vagy csak egy belőle kiválasztott sokaságot, egy felületet. Az első fajta transformácziókat lehetne egy térgeométria alapjává tenni.

Az ő csoportjuk lényegesen más összetételű lenne, mint az eddig tárgyaltak. A mennyiben mind azokat a transzformácziókat magában foglalja, melyek valósoknak képzelt, végtelen kicsiny ponttransformácziókból összetevődnek, magában hordja az elvi megszorítást valós térelemekre és így az önkényesen definiálható függvények tartományának felel meg. Ezt a transzformáczió-csoportot ügyesen tágíthatjuk, ha összekötjük a valós kollineácziókkal, melyek a végtelenben fekvő elemeket is módosítják.

III. Valamennyi ponttranszformáczió csoportja.

Ezzel a csoporttal szemben már egy felület sem bír ugyan egyéni tulajdonságokkal, mert a csoport transzformácziói által mindegyik mindegyikbe átvezethető; mégis vannak magasabb alakzatok, melyeknek vizsgálatánál e csoportot előnyösen lehet alkalmazni. A geométriának itt alapul vett felfogásánál közömbös, hogy ezeket az alakzatokat eddig nem geometriaiaknak, hanem csak analitikaiaknak tekintették, melyek csak alkalmilag találtak geometriai alkalmazásokat és hogy vizsgálatuknál oly folyamatokat (mint pl. éppen tetszőleges ponttranszformácziókat) használtak, melyeket csak ujabb időben fogtak fel tudatosan, mint geometriai átalakításokat. Ilyen analitikai elemek közé tartoznak első sorban a homogén differencziál-kifejezések, továbbá a parcziális differencziálegyenletek. Utóbbiaknak általános fejtegetésénél azonban úgy látszik, a mint ezt a következő fejezetben majd kifejtjük, az összes érintési transzformácziók terjedelmesebb csoportja még előnyösebb.

A főtétel, mely e geometriának alapját képezi az, hogy *egy ponttranszformáczió a térnek egy végtelen kis részére vonatkozólag mindig egy lineáris transzformáczióval egyenértékű.* A projektiv geometria fejtegetései tehát alkalmazhatók a végtelen kicsire vonatkozólag is, bármi legyen különben a csoport, melyet a sokaságok tárgyalásainál alapul vettünk és *ebben rejlik a projektiv módszernek nevezetes jellege.*

Mivel már régen nem volt szó oly tárgyalási módokról, melyek egymást magába foglaló csoportokat vesznek alapul, adjunk itt még egyszer egy példát a 2. §. általános elméletére. Fejtegessük azt a kérdést, hogyan kell az «összes ponttranszformácziók» szempontjából projektiv tulajdonságokat felfogni (a dualisztikus átalakításokról, melyek tulajdonképen a projektiv geométria csoportjához hozzátartoznak, itt eltekintünk). E kérdés azonos a következővel: mely föltétellel választjuk el a ponttranszformácziók összességéből a lineárisokat. Az utóbbiakat jellemzi az, hogy minden sík mellé egy síkot rendelnek; alkalmazásuknál a síkok (vagy a mi ugyanaz: az egyenesek) sokasága nem változik.

A projektiv geometriát az összes ponttranszformácziók geometriájából ép úgy nyerjük a síkok sokaságának adjunkcziója által, valamint az elemi geométriát a projektivből a végtelenben fekvő gömbi kör adjunkcziója által.

Igy különösen azt a körülményt, hogy egy felületet mint bizonyos rendű algebrai felületet jelezünk, mint invariáns vonatkozást a felületek sokaságához fogjuk fel.

Ez nagyon világossá válik, ha GRASSMANNnal az algebrai alakzatok előállítását vonalzóval való szerkesztésükhöz kötjük.

9. §.

Az összes érintési transzformácziók csoportjáról.

Érintési transformácziókat ugyan egyes esetekben már régen ismertek ; sőt JACOBI analitikai vizsgálatoknál már a legáltalánosabb érintési transzformácziókat használta, de az eleven geometriai szemléletbe csak Lie vezette be őket ujabb dolgozataival.* Így tehát nem lesz felesleges itt tüzetesen kifejteni, mit kell érintési transzformáczió alatt értenünk és e mellett a három dimenziós ponttérre fogunk szorítkozni.

Érintési transzformáczió alatt analitikai szempontból minden olyan szubsztitucziót értünk, mely az x, y, z változó értékeket és $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ parcziális differencziálhányadosait új x' y' z' p' q' mennyiségekkel fejezi ki. E mellett, mint látható, érintkező felületek általában ismét érintkezőkbe mennek át, a mi az érintési transzformáczió elnevezését igazolja. Ha a pontot veszszük térelemnek, az érintési transzformácziók három csoportra oszlanak: 1. olyanok, melyek a háromszorosan végtelen sok pont mellé ismét pontokat rendelnek, ezek az éppen megvizsgált ponttranszformácziók, 2. olyanok, melyek a pontokat görbékbe és 3. olyanok, melyet felületekbe vezetik át. Ez a beosztás annyiban nem lényeges, hogy más háromszorosan végtelen sok térelemnek pl. síkoknak használata mellett egy más hármas felosztás áll elő, mely a mostanival nem esik össze.

Hogyha egy pontra az összes érintési transzformácziókat alkalmazzuk, akkor valamennyi pont, görbe és felület összességébe megy át; tehát csak összességükben képezik pontok, görbék és felületek csoportunknak egy *testét.* Ebből következik, hogy valamely feladat formai tárgyalása az összes érintési transformácziók értelmében (így pl. a parczialis differencziálegyenletek elmélete, melyről mindjárt beszélünk) tökéletlen, mihelyt pont- vagy síkkoordinátákkal dolgozunk, mert az alapul vett térelemek nem képeznek testet.

Mind az említett testben foglalt egyedeket pedig nem vezethetjük be mint térelemeket, hogyha a közönséges módszerektől nem akarunk eltérni, mert azoknak száma végtelenszer végtelen nagy.

---

* V. ö. a már idézett dolgozatot: Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe. Math. Ann. V. kt. A parczialis diff. egyenletet illető és a szövegben adott fejtegetéseket lényegesen Lie szóbeli közléseiből vettem; v. ö. dolgozatát: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen, Göttinger Nachrichten, 1872. okt.

Innen áll elő annak szükségessége, hogy e tárgyalásoknál nem a pontot, a görbét vagy felületet, hanem a felületelemet, azaz az x, y, z, p, q értékrendszert vezessük be térelem gyanánt. Minden érintési transzformácziónál minden felületelemből egy új lesz, az ötszörösen végtelen sok felületelem tehát testet képez.

E mellett az álláspont mellett pontot, görbét és felületet egyaránt úgy kell tekintenünk, mint kétszeresen végtelen sok felületelem aggregatumait. Mert a felületet ∞^2 elem takarja be, a görbét ugyanannyi érinti, egy ponton ugyancsak ∞^2 megy át. De az elemeknek ez a kétszeresen végtelen sok aggregatuma még egy közös jellemző tulajdonsággal bír. Értsük két consecutiv (x, y, z, p, q) és $(x+dx,\ y+dy, z+dz,\ p+dp, q+dq)$ felületelem *egyesített helyzete* alatt azt a vonatkozást, melyet a $dz-pdx-qdy=o$ egyenlet kifejez, akkor pont, görbe és felület egyaránt *az elemeknek kétszeresen végtelen sokaságai, melyek közül mindegyik az egyszeresen végtelen sok vele szomszédos elemmel egyesített helyzetben fekszik.* Ez által pont, görbe és felület közösen vannak jellemezve és így kell őket az érintési transzformácziók csoportjának alapul vétele mellett analitikailag ábrázolni.

A consecutiv elemek egyesitett helyzete minden érintési transzformácziónál invariáns vonatkozás. De megforditva az érintési transzformácziókat is úgy értelmezhetjük, mint az x, y, z, p, q változóknak oly helyettesítéseit, melyeknél $dz-pdx-qdy=o$ reláczió önmagába megy át. A tért tehát ezeknél a kutatásoknál öt dimenziós sokaságnak kell tekintenünk és ezt a sokaságot úgy kell tárgyalnunk, hogy csoport gyanánt alapul veszszük a változók mindama transzformáczióinak összességét, melyek egy bizonyos relácziót a differencziálok között változatlanul hagynak.

A vizsgálat tárgyát első sorban azok a sokaságok képezik, melyeket a változók között fennálló egy vagy több egyenlet határoz meg, azaz az első rendű parcziális differencziálegyenletek és rendszereik. Főkérdés lesz, hogyan lehet az adott egyenleteknek eleget tevő elemek sokaságaiból az elemeknek egyszer, kétszer végtelen sorait kiválasztani, melyeknek mindegyike a szomszédokkal egyesített helyzetben van. Ilyen kérdés pl. az elsőrendű parcziális differencziál-egyenlet megoldása, melyet így lehet formulázni: az egyenletnek eleget tevő négyszer végtelen sok elemből ki kell választani mind a jelzett természetü kétszeres sokaságokat. Különösen a teljes megoldás feladata e szabatos alakot kapja: az egyenletet kielégítő négyszer végtelen sok elemet valamiképen kétszer végtelen sok ily sokaságra kell felbontani. Ezeknek a vizsgálatoknak a folytatása nem lehet itt czélunk; e tekintetben csak Lie idézett dolgozataira utalok. Csak ki akarjuk még emelni, hogy az érintési transzformácziók szempontjából egy elsőrendű parcziális differencziálegyenletnek nincs invariánsa, hogy mindegyik átvezethető mindegyik másikba és nevezetesen hogy a lineáris egyenletek továbbra nem különböznek a többiektől. Megkülönböztetések csak akkor lépnek be, ha a ponttranszformácziók álláspontjára visszatérünk.

Az érintési transzformácziók, a ponttranszformácziók és végre a projektiv átalakítások csoportjait egységes módon jellemezhetjük,* a mit itt el nem hallgathatok. Az érintési transzformácziókat már úgy jellemeztük, mint azokat az átalakításokat, melyeknél consecutiv felületelemek egyesített helyzete fennmarad; a ponttranszformácziók ellenben azzal a jellemző tulajdonsággal bírnak, hogy egyesített helyzetben levő consecutiv vonalelemeket épp olyanokká változtatnak át: végre a lineáris és dualisztikus transzformácziók megtartják consecutiv connexelemeknek egyesített helyzetét. Connexelem alatt értem egy felületelem egyesítését egy bennefoglalt vonalelemmel; consecutiv connexelemek akkor vannak egyesített helyzetben, ha az egyiknek nemcsak pontja, hanem vonaleleme is a másiknak felületelemében foglaltatik. A connexelem kifejezés Clebsch ** által újabban a geometriába bevezetett alakzatokra vonatkozik, melyeket egy oly egyenlet képvisel, mely egyidejüleg egy sor pont-, egy sor vonal- és egy sor síkkoordinátát tartalmaz és melynek analogját a síkban Clebsch connexnek nevezte.

---

* E definicziót Lie egy megjegyzésének köszönöm.

** Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie Gött. Abh. 1872 és Ueber ein neues Grundgebilde der anal. Geometrie der Ebene. Gött. Nachr. 1872.

10. §.

Tetszőlegesen kiterjedt sokaságokról.

Már többször emeltük ki, hogy az eddigi fejtegetéseket csak azért fűztük a térbeli szemlélethez, hogy az elvont fogalmakat szemlélhető példákra támaszkodva, könnyebben kifejthessük. Önmagukban véve ezek a vizsgálatok az érzéki képtől függetlenek és a mathematikai kutatás amaz általános körébe tartoznak, melyet a kiterjedt sokaságok tanának vagy Grassmann szerint röviden kiterjedéstannak nevezünk. Önként kinálkozik az a mód, melylyel az előbbiekben a térről mondottakat a sokaság tiszta fogalmára átvihetjük és csak meg akarjuk még egyszer jegyezni, hogy az elvont vizsgálat a geometriával szemben azzal az előnynyel bír, hogy a transzformáczióknak alapul veendő csoportját teljesen tetszésünk szerint választhatjuk, míg a geometriában egy legkisebb csoport, a főcsoport, a priori adva volt.

Mi itt csak a következő három tárgyalási módszert, és ezeket is csak futólag, akarjuk érinteni:

1. *A projektiv módszer vagy a modern algebra (invariánselmélet).* Az ő csoportja ama változóknak linearis és dualisztikus transzformáczióinak összességéből áll, melyeket a sokaság elemének meghatározására alkalmazunk. Már kiemeltük, hogyan alkalmazzuk e módszert a végtelen kicsi tárgyalásánál egy oly sokaságban, melynek dimenziója egygyel nagyobb. Magába foglalja a két még említendő módszert abban az értelemben, hogy csoportja az azoknál alapul veendő csoportot magában foglalja.

2. *Az állandó görbületü sokaság.* Egy ilyent Riemann képzelt először, mint specialis esetét annak a sokaságnak, melynél a változónak egy differencziálkifejezése van adva. Nála a csoport a változók mindama transzformáczióinak összességéből áll, melyek az adott kifejezést változatlanul hagyják. Más oldalról úgy jutunk egy állandó görbületü sokaság fogalmához, hogyha projektiv értelemben egy a változók között adott quadratikus egyenletre mértékmegállapítást alapitunk. Ennél a módnál, szemben a Riemann-félé-

vel, az az általánosítás áll be, hogy a változókat komplexeknek képzelhetjük ; utólag lehet a változókat a valós tartományra korlátozni ; ide tartozik a vizsgálatok nagy sora, melyeket az 5., 6. és 7. §-ban érintettünk.

3. *A síksokaság.* Síksokaságnak nevezi RIEMANN az állandó elenyésző görbületű sokaságot. Elmélete az elemi geométria közvetetlen általánosítása. Csoportját úgy lehet, — mint a geométria főcsoportját, — a projektiv geométria csoportjából kiválasztani, hogyha egy lineáris és egy quadratikus egyenlet által képviselt idomot rögzítünk meg. E mellett valós és képzetes között különbséget kell tennünk, ha a szokásos alakhoz akarunk csatlakozni. Ide számítandók : mindenek előtt maga az elemi geometria, továbbá a közönséges görbületelméletnek ujabban kifejtett általánosításai stb.

Záró megjegyzések.

Záradékul még két megjegyzést teszünk, melyek az eddig előadottakhoz szoros vonatkozásban állanak ; az egyik arra a formalizmusra vonatkozik, melylyel az eddig kifejtett fogalmakat repprezentálni akarjuk, a másik egynehány problemát akar jellemezni, melyeknek megvizsgálása az itt adott kifejtések folytán fontosnak és érdemesnek látszik.

Az analitikai geometriának sokszor szemére hányták, hogy a koordinátarendszer bevezetésével önkényes elemeket részesit előnyben s e szemrehányás egyaránt érvényes a többszörösen kiterjedt sokaságok bármely oly tárgyalásánál, mely az elemet változók érték rendszereivel jellemzi. Ama fogyatékos módszer mellett, melylyel különösen előbb a koordinátamódszert kezelték, ez az ellenvetés gyakran nagyon is jogosult volt, de a módszer raczionális alkalmazásánál eltűnik.

Azoknak az analitikai kifejezéseknek, — melyek egy sokaság vizsgálatánál egy csoport értelmében, felléphetnek — függetleneknek kell lenniök a koordinátarendszertől, a mennyiben ez tetszőlegesen van választva ; és feladatunk most ezt a függetlenséget formailag is evidencziába helyezni. Hogy ez lehetséges és hogyan kell ezt keresztül vinnünk, ezt a modern algebra mutatja, melyben a formai invariánsfogalom, a melyről itt szó van, legvilágosabban van kifejtve. A modern algebra egy általános és kimerítő képző törvénynyel rendelkezik, invariáns kifejezések számára és elvileg csakis ilyenekkel dolgozik. Hasonló követeléssel kell a formai tárgyalással szemben fellépnünk akkor is, ha más, mint a projektiv módszereket veszünk alapul. Mert hiszen a formalismusnak coincidálnia kell a fogalomalkotással, akár ha azt csak mint a fogalomalkotás szabatos és átlátszó kifejezését akarjuk értékesíteni, akár pedig, midőn segítségével eddig kikutatlan területekbe akarunk behatolni.

A problémák felállítását, melyekről még meg akarunk emlékezni, nyerjük, ha az előadott felfogásunkat az egyenleteknek Galois-féle elméletével hasonlítjuk össze.

Galois elméletében, úgy mint itt, az érdek középpontját a transzformácziók csoportjai képezik. A tárgyak, melyekre a változások vonatkoznak, különbözők ugyan, ott dolgunk van discret elemeknek véges számával, itt egy folytonos sokaság elemeinek végtelen számával. Ámde az összehasonlítást a csoportfogalom azonossága mellett mégis folytathatjuk * és erre itt annál inkább rá akarunk mutatni, mert ezáltal jellemezzük bizonyos Lie által és általam kezdett vizsgálatoknak ** helyzetét az itt kifejtett felfogás értelmében.

A Galois-féle elméletben, a mint ez pl. Serret «Traité d'algèbre supérieure»-jében vagy C. Jordan «Traité des substitutions»-jában tárgyaltatik, a csoport vagy szubsztituczio-elmélet maga a kutatások tulajdonképeni tárgya, az egyenletek elmélete csak mint alkalmazás folyik belőle. Ennek megfelelőleg mi transzformáczió-elméletet követelünk, vagyis azoknak a csoportoknak az elméletét, melyeket adott minőségű transzformácziók által elő lehet állítani. A fel-

* Figyelmeztetek arra, hogy Grassmann már «Ausdehnungslehre»-ja első kiadásának (1841) előszavában párhuzamot von a kombinatorika és a kiterjedéstan között.

** V. ö. közös czikkünket: «Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen.» Math. Ann. IV. kt.

cserélhetőség, hasonlóság stb. fogalmait alkalmazzuk épp úgy, mint a szubsztituczió-elméletben. A transzformáczió-elmélet alkalmazásaképen előáll majd a sokaságnak a transzformáczió-csoportok alapul vételéből származó tárgyalása.

Az egyenletek elméletében először az együtthatók szimmetrikus függvényei vonják magukra figyelmünket, azután pedig ama kifejezések, melyek a gyököknek ha nem is minden, de igen sok felcserélésénél változatlanok maradnak. Hogyha egy sokaságot tárgyalunk egy csoport alapul vétele mellett, megfelelően először a testeket (5. §.) kutatjuk, vagyis azokat az alakzatokat, melyek a csoportnak minden transzformácziója mellett változatlanok maradnak. Ámde vannak alakzatok, melyek a csoportnak nem valamennyi, de nehány transzformáczióját megengedik és ezek a csoportra alapított tárgyalás értelmében kiválóan érdekesek, és nevezetes tulajdonságokkal bírnak. Ez ugyanaz, mintha a közönséges geometria értelmében szimmetrikus, szabályos testeket, forgási és csavarfelületeket kitüntetünk. Hogyha a projektiv geometria álláspontjára helyezkedünk és különösen követeljük, hogy a transzformácziók, melyek által az alakzatok egymásba átmennek, felcserélhetők legyenek, akkor a Lie által és általam az idézett dolgozatban tárgyalt alakzatokra és az ott a 6. §-ban felállított problemára jutunk. A végtelen sok felcserélhető lineár sik-transztormácziónak ott az 1. és 3. §-ban adott meghatározása mint részlet a most említett általános transzformáczió-elméletbe tartozik.

---

* Le kell mondanom arról, hogy a szövegben ama termékenységre rá utaljak, melylyel a végtelen kicsiny transzformácziók vizsgálata a differencziálegyenletek elméletében bír. Az idézett dolgozat 7. §-ában Lie és én kimutattuk a következőket: a közönséges differencziálegyenletek, melyek egyenlő végtelen kicsiny transzformácziókat megengednek, egyenlő integrálási nehézségekkel járnak. Hogyan kell a vizsgálatokat parczialis diff. egyenletekre értékesíteni, ezt Lie különböző helyeken, így különösen az előbb említett czikkben Math. Ann. V. Bd,) több példán kimutatta.

(V. ö. Mitth. der Academie zu Christiania, Mai 1872).

[Ma már kijelenthetem azt a tényt, hogy a szövegben említett két feladat folyton szabatosan vezérelte Lie és magam későbbi munkáinak egy nagy részét. A mi Liet illeti, idézhetjük itt Theorie der stetigen Transformationsgruppen» cz. munkáját (Lipcse, I. kt. 1888. II. kt. 1890), melynek rendszeres

Jegyzetek.

I. *A szintétikai és analitikai irány ellentétéről az újabb geométriában.*

A különbséget újabb szintézis és újabb analitikai geometria között ez idő szerint már nem tekintjük lényegesnek, mert úgy a gondolatbeli tartalmuk, mint következtetési módjuk lassanként egészen hasonlóvá vált. Azért választottuk a szövegben mindkettő közös megjelölésére a «projektiv geometria» szót. Noha a szintétikai módszer inkább térbeli szemlélettel dolgozik ugyan és első, egyszerű fejtegetéseinek ezen a réven kiváló vonzó erőt kölcsönöz, mégis a térbeli szemlélet elől az analitikai geometria sem zárkózik el és képleteit mint a geometriai vonatkozások szabatos és átlátszó kifejezését lehet felfogni. Másrészt azonban nem szabad kicsinylenünk azt az előnyt sem, melyet egy jól megkezdett formalismus a továbbkutatásnak azáltal nyújt, hogy bizonyos tekintetben a gondolatot megelőzi. Ragaszkodnunk kell ugyan mindig ahhoz a követeléshez, hogy egy mathematikai tárgyat addig nem tekinthetünk elintézettnek, míg fogalmilag nem vált evidenssé és így a haladás a formalismus révén mindig csak egy első, de egy már nagyon fontos lépés.

II. *A mai geometria való felosztása disciplinákra.*

Ha p. o. megfigyeljük, mennyire nem veszi igénybe a mathematikai fizikus egyáltalában amaz előnyöket, melyeket neki egy csak némileg is kiképezett projektiv szemlélet sok esetben nyujthat és másrészt, hogy az, a ki a projektiv geometriával foglalkozik, hogyan hagyja érintetlenül a mathematikai igazságok ama bő forrását,

---

expozicziója teszi eddig két kötet tárgyát. Az én eddigi dolgozataim közül rámutatok azokra a szabályos testekről, az elliptikus modulfunkcziókról és általában amaz egyértékű függvényekről, melyek lineáris transzformácziókot megengednek. Már 1884-ben kifejtettem az elsőket egy külön munkában: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (Leipzig); nemsokára utána megjelent az elliptikus modulfunkcziók elméletének első kötete, melyben FRICKE nagy segitségemre volt (Lipcse, 1890).]

melyet a felületek görbületének elmélete feltárt: akkor a geométriai tudás mai állapotát nagyon tökéletlennek és remélhetőleg csak átmenetinek kell tekintenünk.

III. *A térbeli szemlélet értékéről.*

Hogyha mi a szövegben a térbeli szemléletet mellékesnek jelezzük, akkor ezt a formulázandó fejtegetéseknek tiszta mathematikai tartalmára való tekintettel gondoljuk. A szemlélet nála csak a szemléltetés értékével bír, mely azonban pædagogiai tekintetben nagyon sokra becsülendő. Egy geometriai minta p. o. ezen az állásponton nagyon tanulságos és érdekes.

Egész más kérdés azonban a térbeli szemléletnek értéke egyáltalában. Ezt mint valami önállót állítom oda. Van egy tulajdonképeni geometria, mely nem, mint a szövegben megbeszélt vizsgálatok, csak az elvontabb kutatásoknak szemléltető alakja akar lenni.

Ennél arról van szó, hogy a térbeli alakokat teljes alaki valóságuk szerint fogjuk fel és (a mi a mathematikai oldalát képezi) a rájuk érvényes vonatkozásokat úgy tekintsük, mint a térbeli szemlélet alapelveinek nyilvánvaló következményeit. Egy minta, akár összeállítottuk, akár megszemléltük, akár csak élénken elképzeltük is, ennek a geometriának nem eszköz a czélhoz, hanem maga a tárgya.

Ha így a geometriát, függetlenül a tiszta mathematikától, melléje mint valami önállót állítjuk, akkor ez önmagában véve bizonyára nem új dolog. De kivánatos, hogy ezt a szempontot nyomatékosan még egyszer kiemeljük, mert az újabb kutatás majdnem egészen mellőzi. Ezzel összefügg, hogy fordítva az újabb kutatásokat ritkán alkalmazták térbeli alakítmányok (räumliche Erzeugnisse) alaki vonatkozásaiknak vizsgálására, pedig épen ebben az irányban az újabb kutatás nagyon termékenynek látszik.

IV. *Tetszőleges dimenziós sokaságokról.*

Nem szükséges mathematikai szempontból fejtegetnünk, hogy a térnek, ha ezt mint pontok helyét fogjuk fel, csak három dimenziója lehet; ép oly kevéssé lehet azonban mathematikai szempontból valakit megakadályozni, hogy ő azt állítsa, hogy a térnek tulajdonképen négy vagy akár végtelen sok dimenziója van, de mi csak hármat vagyunk képesek észrevenni. A többszörösen kiterjedt sokaságok elmélete — amint ez hovatovább az újabb mathematikai kutatás előterébe lép — lényegében egy ily állítástól teljesen független. Meghonosodott benne ugyan egy módja a szólásmódnak, amely csakugyan ennek a felfogásnak a folyománya. A helyett, hogy egy sokaság individiumairól beszélnénk, beszélünk egy magasabb tér pontjairól stb. Önmagában véve ez a módja a beszédnek annyiban előnyös, hogy a megértést a geometriai szemléletre való emlékeztetés által megkönnyíti. De megvolt az a hátrányos következménye, hogy sokan a tetszőleges sok dimenziós sokaságok vizsgálatát azonosnak tekintették a tér mivoltának említett felfogásával. Semmi sem alaptalanabb ennél a felfogásnál. Az illető mathematikai vizsgálatok tényleg azonnal találnának geometriai alkalmazásra, — ha e felfogás helyes volna, — de értékük és czéljuk — teljesen függetlenül e felfogástól — saját mathematikai tartalmukban fekszik.

Egészen más dolog, ha Plücker azt tanította, hogy a valóságos tért tetszőleges sok dimenziós sokaságnak tekinthetjük, ha elemül egy tetszőleges sok parametertől függő idomot (görbét, felületet stb.) vezetünk be. (V. ö. a szöveg 5. §-át.)

Azt a felfogást, mely a tetszőleges sokaság elemét mint a térbeli pont analogonját tekinti, először Grassmann fejtette ki (Ausdehnungslehre 1844). Nála a gondolat teljesen ment a tér természetének említett felfogásától; ezeket az eszméket vissza lehet vezetni Gauss alkalmi megjegyzéseire; Riemann vizsgálatai többszörösen kiterjedt sokaságokról, melyekbe azok bele vannak szőve, tették e felfogást tágabb körökben ismertté.

Mindkét felfogás — Grassmanné épúgy mint Plückeré — sajátságos előnyökkel bir; mindkettőt lehet váltakozva előnynyel alkalmazni.

V. *Az úgynevezett nem-euklidesi geometriáról.*

A szövegben gondolt projektiv mértékgeometria újabb kutatások tanusága szerint összeesik avval a mértékgeometriával, melyet a parallelák axiomájának el nem fogadásával felállitani lehet és melyről újabb időben a nem-euklidesi geométriá nevén sokat beszélnek és vitatkoznak. Hogy a szövegben ezt a nevet nem is érintettük, oly okból történt, mely az előbbi jegyzetben adott fejtegetésekkel összefügg. A nem-euklidesi geométria nevével összefűznek egy csomó nem mathematikai képzetet, melyeket az egyik részről ép annyi buzgósággal ápolnak, mint a mennyivel a másik részről irtóznak tőlük, a melyekhez azonban a mi tisztán mathematikai fejtegetéseinknek semmi közük nincsen. Az a kivánság, hogy e tekintetben némileg a fogalmak tisztázásához hozzájáruljunk, indokolja a következő fejtegetéseket.

Az említett vizsgálatok a parallelák elméletének tárgyában további fejlődményeikkel mathematikai tekintetben két irányban birnak határozott értékkel.

Egyrészt mutatják — és ez a működésük egyszeri és befejezettnek tekinthető —, hogy a parallelák axiomája nem következménye a közönségesen felállitott axiomáknak, hanem hogy egy lényegesen új szemléleti elem, melyet a megelőző vizsgálatok nem érintettek, jut benne kifejezésre. Hasonló kutatásokat kellene minden axiomára nézve folytatni és nem is csak a geometriában; ezáltal nagyobb betekintést nyernénk az axiomák kölcsönös összefüggésébe.

Azonkívül ezek a kutatások egy értékes mathematikai fogalmat teremtettek meg: az állandó görbületű sokaság fogalmát. Ez, amint már említettük és a szöveg 10. §-ában bővebben kifejtettük, igen szorosan függ össze a parallelák elméletétől függetlenül származott projektiv mértékmegállapitással. Ennek a mértékmegállapitásnak tanulmányozása nemcsak önmagában magas mathematikai érdekű és számos alkalmazást enged, hanem a geometriában adott mértékmegállapitást mint különös esetet foglalja magában és megtanít arra, hogy ezt magasabb szempontból felfogjuk.

Teljesen független a kifejtett szempontoktól az a kérdés, mily okok támogatják a parallelák axiomáját: tekintsük-e ezt abszolut módon adottnak — mint némelyek akarják — vagy csak a tapasztalat által megközelitőleg igazoltnak-e, mint mások mondják. Ha vannak okaink az utóbbi feltevésre, akkor a kérdéses mathematikai vizsgálatok módszert adnak arra, hogyan kellene akkor egy exaktabb geometriát készitenünk. A kérdés feltevése azonban nyilván filozofiai és megismerésünknek (Erkenntniss) legáltalánosabb alapelveit illeti. A mathematikust mint ilyet a kérdés nem érdekli és ő megkivánja, hogy kutatásait ne tekintsük attól a feleléttől függőknek, melyet egyik vagy másik oldalról a kérdésre adni lehet.

VI. *Vonalgeometria mint egy állandó görbületű sokaság vizsgálata.*

Hogyha a vonalgeometriát összekötjük egy ötdimenziós sokaság projektiv mértékmegállapitásával, tekintetbe kell vennünk, hogy az egyenes vonalak előttünk a mértékmegállapitás értelmében csak mint a sokaságnak végtelen távol elemei szerepelnek. Szükségessé válik tehát megvizsgálni, milyen értéke van a projektiv mértékmegállapitásnak az ő végtelen távolban fekvő elemei számára és ezt fogjuk itt egy kevéssé részletezni, hogy eltávolitsuk azokat a nehézségeket, melyeket különben a vonalgeometria, mint mértékgeometria mutat. Ezeket a fejtegetéseket ama szemléltető példához füzzük, melyet az egy másodrendű felületre alapitott projektiv mértékmegállapitás ad.

A tér két tetszőlegesen felvett pontjának a felületre vonatkozólag van egy abszolut invariánsa: kettős viszonyuk ahoz a két ponthoz, melyben összekötő egyenesük a felületet átmetszi. Hogyha azonban a két felvett pont a felületre esik, az emlitett kettős viszony mindig zérus lesz, kivéve mikor a két pont egy alkotóra esik, mert ekkor határozatlan. Ezzel az egyetlen különös esettel lehet dolgunk, hogyha a két pont nem esik össze, és így a következő tételt nyerjük:

Az a projektiv mértékmegállapítás, melyet a térben egy másodrendű felületre lehet alapítani, még nem ad mértékmegállapítást a geometriára e felületen.

Evvel összefügg, hogy a felületnek önönmagába való lineár transzformáczióinál három tetszőleges pontja három másikkal összeeshetik.*

---

* Ezek a viszonyok megváltoznak a közönséges mértékgeometriánál; két végtelenben fekvő pontja számára mindig van abszolut invariánsa. Ezzel találhatnánk ellenmondást, ha a végtelenben fekvő felület lineáris transzformáczióit önmagába megolvassuk, de ez eloszlik az által, hogy a köztük fog-

Hogyha magán a felületen akarunk egy mértékmegállapítást, akkor a transzformácziók csoportját meg kell szorítani és ezt akkor érhetjük el, ha egy tetszőleges térbeli pontot (avagy a polársíkját) szilárdan tartjuk. Ha a térbeli pontot először a felületen kívül veszszük fel, akkor vetítsük a felületet a pontból egy síkra, a hol mint átmeneti görbe egy kúpszelet lép fel. Erre a kúpszeletre alapítsunk a síkban egy projektiv mértékmegállapítást, melyet azután visszafelé a felületre viszünk át.[1] Ez egy tulajdonképeni mértékmegállapítás állandó görbülettel és így a következő tételt nyerjük: *A felületen nyerünk egy ily mértékmegállapítást, mihelyt egy rajta kívül fekvő pontot szilárdan tartunk* és megfelelőleg:[2] *Elenyésző görbületű mértékmegállapítást úgy nyerünk a felületen, hogyha szilárd pontul magának a felületnek egy pontját választjuk.*

Mind e mértékmegállapítások számára a felületen a felületnek alkotói elenyésző hosszuságú vonalak. Az ívelem kifejezése a felületen a különböző megállapításoknál csak egy tényezőben különbözik. Abszolut ívelem a felületen nincs. Beszélhetünk azonban arról a szögről, melyet haladási irányok (Fortschreitungsrichtungen) a felületen egymással képeznek.

Mindezeket a tételeket már most minden további nehézség nélkül felhasználhatjuk a vonalgeometria számára. A vonaltér számára nem létezik tulajdonképeni mértékmegállapítás. Ilyen csak az által fejlődik, ha egy lineár complexust szilárdan tartunk és pedig állandó vagy elenyésző görbületű mértékmegállapítás fejlődik a szerint, a mint a complexus általános vagy speciális (egy egyenes). Eme complexus megválasztásához fűződik egy abszolut ívelem létezése. Függetlenül ettől a két végtelenül szomszédos, egymást metsző egyenes távolsága zérus és beszélhetünk egy oly szögről is, melyet két tetszőleges haladási irány egymással képez.[3]

lalt translacziók és hasonlósági transzformácziók a végtelen távolt egyáltalában nem változtatják.

[1] V. ö. a 7. §. t.

[2] V. ö. a 4. §. t.

[3] V. ö. Über Liniengeometrie und metrische Geom. M. Ann, V. kt. 271.

VII. *A binär alakok interpretácziója.*

Itt meg akarunk emlékezni arról az áttekinthető alakról, melyet a kubikus és biquadratikus binär alakok alakrendszerének adhatunk, ha az $x+iy$ interpretálását a gömbfelületen alapul veszszük.

Egy f kubikus binär alaknak van egy Q kubikus és egy $\triangle$ quadratikus kovariánsa és egy R invariánsa.[1] f-ből és Q-ból a hatodrendü kovariánsoknak egy egész sorát

$$Q^2+\lambda . Rf^2$$

lehet összetenni, melyek közül $\triangle^2$ is foglaltatik. Meg lehet mutatni, hogy a kubikus alak minden kovariánsának egy ily hatpontból álló csoportra kell felbomlania. A mennyiben λ complex értékeket vehet fel, kétszeresen végtelen sok ily érték van.

Az egész így megadott alakrendszert már most a gömbön következőleg ábrázolhatjuk.[3]

A gömbnek önönmagába való alkalmas lineáris transzformácziójával hozzunk három pontot, melyek f-et képviselik, egy legnagyobb kör három æquidistans pontjába; ez legyen az æquator; rajta a három pontnak földrajzi hosszúsága 0°, 120°, 240°. Így Q adja az æquator 60°, 180°, 300° hosszúságú pontjait, $\triangle$ a két polust. Minden $A^2+\lambda Rf^2$ alakot képvisel hat oly pont, melyeknek α szélességét és β hosszát a következő schema adja:

α	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$
β	$120+\beta$	$240+\beta$	$-\beta$	$120-\beta$	$240-\beta$

Ha ezeket a pontrendszereket a gömbön megfigyeljük, látjuk, hogy f, Q kétszeresen, $\triangle$ háromszorosan számítva áll elő belőlük (zweifach und dreifach zählend).

Egy biquadratikus alaknak egy ép ily H kovariánsa van, továbbá

---

[1] V. ö. Clebsch «Theorie der binären Formen» czimű művének megfelelő fejezeteit.

[2] Az által, hogy f lineáris transzformáczióit önönmagába vizsgáljuk. Math. Ann. IV. 352.

[3] [Ld. Beltrami Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche. (Memorie Acc. Bologna 1870).]

egy hatodfokú T kovariánsa és két i és j invariánsa. Különösen említendő a biquadratikus alakok $iH+\lambda jf$ serege, melyek mind ugyanahoz a T-hez tartoznak és melyek közül az a három quadratikus alak, melyekre T felbontható, kétszeresen számítva foglaltatik.

Fektessünk most a gömb középpontján át 3 egymásra merőleges OX, OY, OZ tengelyt. Hat átmetszési pontjuk a gömbbel adja a T alakot. Az $iH+\lambda jf$ quadruplum négy pontját, — ha xyz a gömb egy tetszőleges pontjának koordinatáit jelentik — a következő schema adja:

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z, \\ x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z. \end{array}$$

A négy pont mindig egy szimmetrikus tetraéder csúcsait adja, melynek szemben fekvő oldalait a koordinata-rendszer tengelyei felezik, a mi T szerepét a biquadratikus egyenletek elméletében mint $iH+\lambda jf$ rezolvensét, jellemzi.

A FELÜLETEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE

(DISQUISITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS)

IRTA

GAUSS KÁROLY FRIGYES

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

MAGYARRA FORDITOTTA

SZÍJÁRTÓ MIKLÓS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1897

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A FELÜLETEK ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

(Disquisitiones generales circa superficies curvas.)

GAUSS KÁROLY FRIGYES-től.

(Carl Fridrich Gauss Werke. IV. B. p. 217—258. Herausgegeben von der Königlic hen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1873.)

1.

[219] Oly kérdések, a melyekben különböző irányú térbeli egyenesek fordulnak elő, sok esetben áttekinthetőbbekké, egyszerűbbekké lesznek, ha egy segédgömbfelületet vezetünk be a tárgyalásba, mely tetszés szerint választott középpont körül az egységsugárral van szerkesztve. Ily gömbfelület felhasználásával a különböző irányokat, a kérdéses egyenesekkel párhuzamosan vont sugaraknak végpontjai határozzák meg a segédgömbfelületen. Ha egy pontnak térbeli helyzetét három koordináta, vagyis az illető pontnak három egymásra merőlegesen álló síktól való távolságai határozzák meg, akkor mindenek előtt az említett síkokra merőlegesen álló tengelyeknek az irányát kell figyelembe vennünk. A gömbfelületnek a tengelyek irányait meghatározó három pontja legyen 1-, 2-, 3-al jelölve; e pontok tehát 90°-ra esnek egymástól. A tengely-irányok alatt azokat az irányokat kell érteni, a melyeknek mentén a koordináták növekednek.

2.

Czélszerű lesz néhány tételt, melyek az alábbi kutatások folyamán gyakran fordulnak elő, itt előrebocsátani.

I. Két egymást metsző egyenestől bezárt szöget a gömbfelület ama két pontja közé eső ív méri, a melynek végpontjai az illető egyeneseknek a gömbfelületen megfelelnek.

II. Valamely síknak az állását az a legnagyobb gömbkör határozza meg, melynek síkja párhuzamos az illető síkkal.

[220] III. Két síknak a hajlásszöge egyenlő az illető síkokat képviselő két legnagyobb gömbkör alkotta szöggel. Ezt a szöget különben mérhetjük a két legnagyobb gömbkör pólusai közé eső ívvel is. Hasonlóképen, egy egyenesnek valamely síkra vonatkozó hajlásszögét az az ív méri, mely a gömbfelületnek a szóban levő egyenes irányát meghatározó pontjából, merőlegesen halad az illető síkot meghatározó legnagyobb körig.

IV. Legyenek x, y, z és x', y', z' két, egymástól r távolságra eső pontnak koordinátái. Legyen továbbá L a gömbfelületnek az a pontja, mely az első pontból a második ponthoz menő egyenesnek irányát szabja meg, ekkor

$$x' = x + r\cos 1L$$
$$y' = y + r\cos 2L$$
$$z' = z + r\cos 3L.$$

V. Innen közvetetlenül következik, hogy általában

$$\cos^2 1L + \cos^2 2L + \cos^2 3L = 1,$$

továbbá, hogy ha L' a gömbfelület egy másik pontját jelöli, akkor

$$\cos 1L\,.\cos 1L' + \cos 2L\,.\cos 2L' + \cos 3L\,.\cos 3L' = \cos LL'.$$

VI. *Theorema. Jelöljenek L, L', L'', L''' négy pontot a gömbfelületen, továbbá jelölje A azt a szöget, melyet a LL' és $L''L'''$ ívek, vagy azok meghosszabbításai egymással képeznek, akkor*

$$\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' =$$
$$= \sin LL'.\sin L''L'''.\cos A.$$

Bebizonyítás. Legyen a LL' és $L''L'''$ ívek metszéspontja szintén A, továbbá legyen

$$AL=t,\quad AL'=t',\quad AL''=t'',\quad AL'''=t'''.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t\ \cos t'' + \sin t\ \sin t''\ \cos A\\
\cos L'L''' &= \cos t'\cos t''' + \sin t'\sin t'''\cos A\\
\cos LL''' &= \cos t\ \cos t''' + \sin t\ \sin t'''\cos A\\
\cos L'L'' &= \cos t'\cos t'' + \sin t'\sin t''\ \cos A,
\end{aligned}$$

és innen:

$$\begin{aligned}
&\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' =\\
&= \cos A\,[\cos t\cos t''\sin t'\sin t''' + \cos t'\cos t'''\sin t\sin t'' -\\
&- \cos t\cos t'''\sin t'\sin t'' - \cos t'\cos t''\sin t\sin t'''] =\\
&= \cos A\,(\cos t\sin t' - \sin t\cos t')\,(\cos t''\sin t''' - \sin t''\cos t''') =\\
&= \cos A\sin(t'-t).\sin(t'''-t'') = \cos A.\sin LL'.\sin L''L'''.
\end{aligned}$$

[221] Itt még a következőket kell szem előtt tartanunk: Mindkét legnagyobb körnek két ága indul ki az A pontból, és ezek az ágak az A pontban két szöget alkotnak; ezek együttesen 180°-ot tesznek ki. Ez ágak közül, a mint az előzőkből következik, azokat kell választanunk, a melyeknek az iránya megegyezik az L-ből L'-ba és L''-ből L'''-ba mozgó pontnak irányával. Innen egyszersmind világos, hogy a legnagyobb körök két metszéspontja közül bármelyiket is választhatjuk. Az A szög helyett az LL' és $L''L'''$ ívekhez tartozó legnagyobb körök pólusai közé eső ívet is választhatjuk. Természetes azonban, hogy ez esetben azokat a pólusokat kell tekintetbe vennünk, a melyek az említett ívekre nézve hasonló fekvésüek, az-az mindkét pólus jobb vagy balkéz felé essék, a midőn L-ből L'-ba és L''-ből L'''-ba mozgunk.

VII. Legyen L, L', L'' a gömbfelület három pontja, s használjuk rövidség kedvéért a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
&\cos 1L = x\ , && \cos 2L = y\ , && \cos 3L = z\ ,\\
&\cos 1L' = x'\ , && \cos 2L' = y'\ , && \cos 3L' = z'\ ,\\
&\cos 1L'' = x'', && \cos 2L'' = y'', && \cos 3L'' = z'',
\end{aligned}$$

továbbá

$$xy'z''+x'y''z+x''yz'-xy''z'-x'yz''-x''y'z=\Delta.$$

λ legyen annak a legnagyobb körnek a pólusa, mely LL' ívhez tartozik, és pedig az a pólus, mely az LL' ívre vonatkoztatva épen oly fekvéssel bír, mint az 1 pont a 23 ívre nézve. Ez esetben a megelőző tétel szerint

$$yz'-y'z=\cos 1\lambda \,.\, \sin 23 \,.\, \sin LL'$$

vagy mert $23=90^\circ$,

$$yz'-y'z=\cos 1\lambda \,.\, \sin LL'$$

és épen így

$$zx'-z'x=\cos 2\lambda \,.\, \sin LL'$$
$$xy'-x'y=\cos 3\lambda \,.\, \sin LL'.$$

Szorozzuk ez egyenleteket rendre x''-, y''-, z''-vel és azután adjuk azokat össze, akkor az V. pont alatt felhozott 2. egyenlet szerint

$$\Delta=\cos \lambda L'' \,.\, \sin LL'.$$

Itt három eset fordulhat elő. *Először* L'' feküdhetik az LL' ívhez tartozó legnagyobb körön; ekkor $\lambda L''=90^\circ$ és innen $\Delta=0$. Ha ellenben L'' kivül fekszik az előbb említett legnagyobb körön, akkor a *második* eshetőség az lesz, a midőn a λ és L'' ugyanazon oldalon feküsznek, míg a *harmadik* esetben pedig a λ és L'' a legnagyobb kör ellenkező oldalán vannak. E két utóbbi esetben az L, L' és L'' pontok [222] gömbháromszöget alkotnak, és pedig úgy, hogy a második esetben a három pont oly sorrendben következik egymásra, mint az 1, 2, 3 pontok, míg a harmadik esetben a pontok sorrendje ellenkező. Jelöljék L, L', L'', az $LL'L''$ gömbháromszög szögeit és p az L'' pontból az LL' oldalra bocsátott sphaerikus magasságot, akkor

$$\sin p = \sin L \,.\, \sin LL'' = \sin L' \,.\, \sin L'L'',$$

továbbá

$$\lambda L'' = 90^\circ \mp p,$$

a hol a felső előjel a második, az alsó előjel pedig a harmadik esetben érvényes. Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} \pm \Delta &= \sin L \,.\, \sin LL' \,.\, \sin LL'' \\ &= \sin L' \,.\, \sin LL' \,.\, \sin L'L'' \\ &= \sin L'' \,.\, \sin LL'' \,.\, \sin L'L''. \end{aligned}$$

Különben az első esetet tekinthetjük mint olyant, a mely benfoglaltatik a harmadik esetben. Ismeretes az is, hogy $\pm\, \Delta$ annak a gúlának a hatszoros térfogatát jelenti, melynek a szögpontjai L, L', L'' és a gömb középpontja. Végre innen közvetlenül következik, hogy $\pm \frac{1}{6}\Delta$ általában tetszőleges gúla térfogatát fejezi ki, melynek csúcsai: a koordináta-rendszer kezdőpontja, továbbá ama pontok, melyeket az x, y, z; x', y', z' és x'', y'', z'' koordináták határoznak meg.

3.

Midőn azt mondjuk, hogy a görbe felület valamely A pontjában folytonos a görbület, ez annyit jelent, hogy az A pontból, a görbe felületen hozzá végtelen közel eső pontokhoz menő összes egyenesek irányai, végtelen kicsit térnek el egy, az A ponton átmenő síktól. Ez a sík, mint mondani szokás, érinti a görbe felületet az A pontban. Mihelyt ennek a feltételnek nincs elég téve valamely pontban, akkor ott hiányzik a görbület folytonossága. Ez az eset áll fent a kúpnál, annak csúcspontjában. A következő kutatások oly görbe felületekre vagy felületrészekre szorítkoznak, amelyeknél a görbület folytonossága sehol sincs megszakítva. Csak azt jegyezzük még meg, hogy a módszerek, melyek az érintő síkok meghatározására szolgálnak, oly szinguláris pontokra nézve, melyekben a görbület folytonossága megszakad, elvesztik jelentőségüket és határozatlan eredményre vezetnek.

4.

Az érintő sík helyzetét legegyszerűbben a görbe felületre A pontban emelt merőlegessel lehet meghatározni. Ez az egyenes a görbe felületnek egyik normálisa. Ennek a normálisnak az irányát a gömbfelületen levő L pont határozza meg, és legyen

[223] $$\cos 1L = X, \quad \cos 2L = Y, \quad \cos 3L = Z,$$

továbbá az A pont koordinátái x, y, z. Legyenek továbbá a görbe felület egy szomszédos A' pontjának koordinátái: $x+dx$, $y+dy$,

$z+dz$, továbbá ds az A' pontnak a távolsága az A ponttól, végre λ a görbe felületnek ama pontja, mely az AA' ívelem irányát határozza meg. Ekkor

$$dx=ds\,.\cos 1\lambda, \quad dy=ds\,.\cos 2\lambda, \quad dz=ds\,.\cos 3\lambda,$$

és mivel $\lambda L=90^\circ$, kell hogy legyen

$$X\cos 1\lambda+Y\cos 2\lambda+Z\cos 3\lambda=0.$$

Ez egyenletből, tekintettel lévén az előzőkre, következik, hogy

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Általában görbe felületet kétféle módon lehet analitikailag előállítani. Az *első* módszer egy az x, y, z koordináták közt fennálló egyenletet használ fel. Ez az egyenlet legyen $W=0$ alakra hozva, hol W az x, y, z változóknak függvénye. Legyen a W függvény teljes differencziálja:

$$dW=Pdx+Qdy+Rdz,$$

akkor a görbe felületen

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

és így egyszersmind

$$P\cos 1\lambda+Q\cos 2\lambda+R\cos 3\lambda=0.$$

Mivel ez az egyenlet épen úgy, mint a fentebbi, a felületen fekvő összes ds ívelemek irányára fennáll, kell hogy az X, Y, Z arányosak legyenek a P, Q, R-el. És ennek következtében, mivel még

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$

lesz:

$$X=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \quad Y=\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \quad Z=\frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

vagy

$$X=\frac{-P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \quad Y=\frac{-Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}, \quad Z=\frac{-R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

[224] A *második* módszernél a koordinátákat két új változó p

és q függvényének tekintjük. E függvények differencziálása útján a következő egyenletek jönnek létre:

$$dx=adp+a'dq$$
$$dy=bdp+b'dq$$
$$dz=cdp+c'dq,$$

e kifejezéseknek a fentebbi egyenletbe való helyettesítése után lesz:

$$(aX+bY+cZ)\,dp+(a'X+b'Y+c'Z)\,dq=0.$$

Mivel pedig ez egyenlet érvényessége független a dp és dq differencziálok értékétől, kell hogy

$$aX+bY+cZ=0 \quad \text{és} \quad a'X+b'Y+c'Z=0$$

legyen. Innen arra következtethetünk, hogy az X, Y, Z mennyiségeknek arányosaknak kell lenni a

$$bc'-cb', \quad ca'-ac', \quad ab'-ba'$$

mennyiségekkel. Ha még rövidség kedvéért felvesszük hogy:

$$\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}=\Delta,$$

akkor

$$X=\frac{bc'-cb'}{\Delta}, \quad Y=\frac{ca'-ac'}{\Delta}, \quad Z=\frac{ab'-ba'}{\Delta},$$

vagy pedig

$$X=\frac{cb'-bc'}{\Delta}, \quad Y=\frac{ac'-ca'}{\Delta}, \quad Z=\frac{ba'-ab'}{\Delta}.$$

A most említett két általános módszerhez még egy *harmadik* módszer is csatolható, melynél a koordináták egyike, pl. z, mint a másik két koordinátának x, y-nak a függvénye szerepel. Ez a módszer természetesen nem más, mint az első vagy második módszernek egy különös esete.

Ha itt feltesszük, hogy

$$dz=tdx+udy,$$

szintén nyerjük hogy:

$$X=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Y=\frac{-u}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Z=\frac{1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$$

vagy pedig

$$X=\frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Y=\frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}},\quad Z=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}.$$

5.

[225] Az előbbi fejezetben előforduló kettős megoldások, mint az könnyen belátható, a gömbfelület ellentétes pontjaira, azaz ellentétes irányokra vonatkoznak, és pedig azért, mert a normálist a felület egyik vagy másik oldalán képzelhetjük. Ha ezentúl különbséget teszüuk a felület két oldala között, úgy hogy az egyiket külső, s a másikat belső oldalnak nevezzük, akkor a 2. (VII.) fejezetben levezetett tétel alapján mindkét normálishoz tudunk megfelelő megoldást találni, mihelyt lehetséges kriteriumot felállítani arra nézve, hogy az egyik oldalt a másik oldaltól meg tudjuk különböztetni.

Az első módszernél egy ily kriterium felállítására alapul szolgálhat a W értékének előjele. Mert a görbe felület elválasztja a térnek azt a részét, melyben W pozitiv értékű, a térnek ama részétől, a melyben a W értéke negativ. Az előrebocsátott tételekből világos, hogy ha W a felület külső oldalán vesz fel pozitiv értéket, és ha a normális kifelé van húzva, akkor a normális irányszögét az első megoldás szabja meg. Különben könnyű minden egyes esetben eldönteni, hogy vajjon a W előjelét tekintve ugyanaz a szabály az egész felületre áll-e fenn, vagy pedig a különböző felületrészekhez különböző szabályok tartoznak. A míg a P, Q, R együtthatók véges értékűek és nem tünnek el egy időben, a folytonosság törvénye kizárja a jelváltozást.

A második módszer alkalmazásánál, a görbéknek két rendszere képzelhető a görbe felületen, az egyik, a melyikre nézve p változó, q állandó; míg a másik, a melyikre nézve q változó és p állandó. E vonalaknak a külső felületre vonatkozó kölcsönös fekvése dönti el, hogy melyik megoldást kell választani. A míg ugyanis a következő három vonal ú. m.: 1. az első rendszer egyik vonalának A pontból kiinduló az az ága, melyen p növekedik, 2. a második rendszerhez tartozó A ponton keresztül menő görbe vonalnak az az ága, melyen q növekedik, 3. az A pontban kifelé vont normális hasonló fekvésűek mint a kezdőpontból kiinduló x, y, z koordináta-tengelyek (ha pl. a három előbb említett vonal, valamint ez utóbbiak közül az első balra, a második jobbra s a harmadik felfelé van irányítva), akkor az első megoldást kell választani, mihelyt azonban a három első vonal fekvése ellenkező irányú mint az x, y, z tengelyek fekvése, a második megoldás lesz érvényes.

A harmadik módszernél azt kell megvizsgálni, vajjon a z pozitiv irányú növesztésével, ha ezalatt x és y változatlan maradnak, a felületnek kérdéses pontja a külső vagy a belső oldalra kerül-e. Az első esetben a kifelé irányított normálist az első megoldás, míg a befelé irányítottat pedig a második megoldás határozza meg.

6.

[226] Valamint valamely görbe felülethez tartozó normálisok irányának a segédgömb felületére való átvitele folytán a görbe felület minden egyes pontjának egy-egy pont felel meg a gömbfelületen, épen ugy a görbe felületen felvett bármely vonal vagy idom szintén ábrázolható a gömbfelületen levő megfelelő vonallal illetve idommal. Két, egymásnak ily módon megfelelő idomot, melyek közül az egyik a másiknak képét szolgáltatja, kettős szempontból lehet összehasonlítani. Ugyanis azoknak vagy kizárólag csak a nagyságára tekintünk, vagy pedig teljesen eltekintve azok nagyságától, csakis a helyzetüket vesszük figyelembe.

Az első szempont alapúl szolgál nehány új fogalom megalkotására, melynek a görbe felületek elméletébe való bevitele nagy előnynyel jár. A görbe felület minden egyes határolt részénél beszélhetünk *teljes görbületről* vagy *totális görbületről*, melyet a gömbfelület megfelelő idomával mérünk. Ettől a totális görbülettől jól meg kell különböztetni a bizonyos mértékben specificus görbületet, melyet mi *görbületi mértéknek* nevezünk. Ez utóbbi a görbe felület egy *pontjára* vonatkozik, és azt a hányadost jelöli, mely akkor jön létre, ha az illető ponthoz tartozó felületelem totális görbületét osztjuk magával az elemnek a területével. A görbületi mérték tehát, két végtelen kis területnek a viszonya, és pedig oly felület-elemek területének viszonya, melyek megfelelnek egymásnak a görbe felületen és a segédgömbön. Ez új fogalomnak a haszna, mint reméljük, a következő kutatások folyamán még inkább ki fog tünni. Az elnevezést illetőleg főképen az lebegjen szemünk előtt, hogy kerüljünk minden kétértelműséget, s épen ezért nem tartottuk helyén valónak, hogy egyszerűen csak átvegyük a sík görbék tanában rendszerint használt kifejezéseket (habár ezek sem minden tekintetben megfelelők) ; mert ez esetben a görbületi mértéket egyszerűen csak görbületnek s a totális görbületet pedig amplitudónak kellene neveznünk. De hisz mért ne választanánk szabadon az elnevezéseket, hisz a fődolog az, hogy a jelölt fogalom üres ne legyen és hogy az elnevezés téves magyarázatra ne csábítson.

Valamely idom a segédgömbön, a felület megfelelő idomának helyzetére vonatkozólag, lehet vagy megegyező, vagy ellentétes (megfordított). Az első eset akkor lép föl, ha a görbe felület egy pontjából kiinduló különböző, de nem ellentétes irányban húzott vonalaknak a gömbfelületen hasonló fekvésű vonalak felelnek meg ; azaz, ha a jobb oldalra eső vonalnak a képe szintén jobb oldalra esik. A második esetnek pedig épen az ellenkező körülmények között van helye.

E két esetet a görbületi mérték pozitiv vagy negativ előjelével fogjuk egymástól megkülönböztetni. Ennek a megkülönböztetésnek különben csak annyiban van helye, a mennyiben mindkét felületnek kiválasztjuk [227] egy bizonyos oldalát s azután úgy képzeljük, hogy az idomok ezeken az oldalokon feküsznek. A segédgömbfelületen, a külső felületet, a középponttól elfordult oldalt választjuk. A görbe felületen szintén a külső oldalt választhatjuk, vagy azt, a melyet külsőnek tekintünk, vagy helyesebben azt az oldalt, a melyre emelve gondoljuk a normálisokat. Természetes dolog, hogy az idomok megegyezőségét illetőleg semmi változás sem áll be, ha azt képzeljük, hogy a felületen úgy az idomok, mint a normálisok az ellenkező oldalra vannak rajzolva, csak az idomnak a képe a gömbfelületnek ugyanarra az oldalára legyen vonatkoztatva.

A *görbületi mértéknek* a végtelen kis idom fekvésétől függő pozitiv vagy negativ előjelét kiterjeszthetjük a felület valamely véges idomának a totális görbületére is. Ha azonban ezt a tárgyat a teljes általánosságában akarjuk tárgyalni, akkor még szükség van némely dolog megvilágitására, a miket itt csak röviden említünk meg.

Ha a görbe felületen levő idom oly természetű, hogy minden egyes benne fekvő pontnak a gömbfelületen *különböző* pontok felelnek meg, akkor a definiczió nem kiván semmi bővebb értelmezést sem. Ha azonban ennek a követelménynek nincs elég téve, akkor a gömbfelületen fekvő idom bizonyos részét kétszer vagy többször is kell számitásba venni. Ilyen módon azután, a szerint, a mint a fekvések megegyezők vagy ellentétesek, nagyobbodás vagy kölcsönös megsemmisités állhat be. Ily esetben a következő egyszerű eljárás állhat rendelkezésünkre: gondoljuk hogy a görbe felületen levő idom oly részekre van osztva, a melyek önmagukat tekintve mindannyian eleget tesznek a fenti feltételeknek, s ezután határozzuk meg az egyes részek totális görbületét a gömbfelületen fekvő megfelelő idom területével, úgy, hogy az előjelre nézve az idomok fekvése legyen irányadó, ekkor az egész idom totális görbülete gyanánt azt az értéket kell venni, a melyhez az egyes részeknek megfelelő totális görbületek összeadásával jutunk.

Valamely idom totális görbületét tehát általánosságban a következő integrál adja meg:

$$\int k d\sigma,$$

hol $d\sigma$ a felület egy pontjában levő felületelemet, k pedig az ugyanazon ponthoz tartozó görbületi mértéket jelöli. A mi ennek az integrálnak a geometriai értelmezését illeti, főleg a következőkre kell figyelemmel lennünk.

A görbe felületen levő idom kerületének (a 3. §-ban említett megszorítás mellett) a gömbfelületen mindég egy önönmagába visszatérő vonal felel meg. Ha ez a görbe vonal önmagát sehol sem metszi, akkor e görbe vonal az egész gömbfelületet két részre osztja, melyek közül az egyik a görbe felületen levő idomnak felel meg. Ennek a résznek a területe pozitiv vagy negatív előjellel véve, a szerint a mint ez, a kerületét tekintve, ugyanazon vagy ellentétes fekvésű a görbe felületen levő idommal, fogja kifejezni a görbe felületen levő idom totális görbületét. Mihelyest azonban az említett vonal önmagát egyszer vagy többször metszi, jóllehet az idom alakja bonyolultabb, mindazonáltal épen oly joggal lehet hozzá egy területet meghatározni, mint a csomópont nélküli idomhoz, és ez a felületnagyság jól felfogva, mindég megfogja adni a totális görbület helyes értékét [228]. Ennek a tárgynak a bővebb fejtegetését azonban, a mi már az idomok legáltalánosabb felfogására vonatkoznék, más alkalomra kell fentartanunk.

7.

Most a görbe felület valamely pontjában fellépő görbületi mérték nagyságát meghatározó képletet fogjuk levezetni. Ha $d\sigma$ a tárgyalt felületelem területét jelenti, akkor $Zd\sigma$ ennek a területnek a *projekcziója* az xy sikra vonatkozólag; és épen így, ha $d\Sigma$ a gömbfelület megfelelő elemének a területe, akkor $Zd\Sigma$ ugyanezen területnek a projekczióját jelenti, ugyancsak az xy síkra vonatkozólag. A Z-nek pozitiv vagy negativ előjele azonban megmutatja, hogy a projekczió fekvése a projicziált elem fekvésével megegyező-e vagy pedig ellentétes, természetes innen, hogy a projekcziónál a területek nagyságának a viszonya s azok kölcsönös fekvése épen olyan lesz, mint magoknál az elemeknél. Vegyünk most a felületen oly elemet figyelembe, melynek háromszög alakja van. Legyenek a három csúcspont projekczióinak a koordinátái:

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x+dx, & y+dy, \\ x+\delta x, & y+\delta y. \end{array}$$

Ennek a háromszögnek kétszeres területe

$$dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x,$$

és pedig ez a kifejezés a kétszeres területet pozitiv vagy negativ előjellel adja, a szerint, a mint az első ponttól a harmadik ponthoz vezető oldal, arra az oldalra vonatkoztatva, a mely az elsőt a másodikkal köti össze, épen úgy fekszik, mint az y koordinátatengely az x koordinátatengelyre nézve, vagy ellentétesen.

Legyenek továbbá a gömbfelületen levő megfelelő elem projekcziójának szögpontjaihoz tartozó koordináták

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X+dX, & Y+dY, \\ X+\delta X, & Y+\delta Y, \end{array}$$

akkor ennek a projekcziónak a kétszeres területe

$$dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X,$$

a mely kifejezésnek az előjeléről ugyanazt mondhatjuk, a mit fentebb mondottunk. Innen a görbe felület szóban forgó pontjában a görbületi mérték értéke [229]

$$k = \frac{dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X}{dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy a felület a 4. §-ban említett harmadik alakban van megadva, akkor X és Y az x és y függvényei, és így

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial x}\, dx + \frac{\partial X}{\partial y}\, dy, \\ \delta X &= \frac{\partial X}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\, \delta y, \\ dY &= \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\, dy, \\ \delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\, \delta y. \end{aligned}$$

Ez értékek helyettesítése után a fentebbi kifejezés a következő alakba megy át:

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Tegyük fel, mint fentebb, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

továbbá, hogy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = T, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = U, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V,$$

azaz, hogy

$$\begin{aligned} dt &= Tdx + Udy \\ du &= Udx + Vdy \end{aligned}$$

s tekintve, hogy a fentebbiek folytán

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1+t^2+u^2)Z^2 = 1,$$

és innen

$$\begin{aligned} dX &= -Zdt - tdZ, \\ dY &= -Zdu - udZ, \end{aligned}$$

$$(1+t^2+u^2)\,dZ + Z(tdt+udu) = 0;$$

vagy

$$\begin{aligned} dZ &= -Z^3(tdt+udu), \\ dX &= -Z^3(1+u^2)\,dt + Z^3tudu, \\ dY &= +Z^3tudt - Z^3(1+t^2)\,du, \end{aligned}$$

[230] úgy hogy végre

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= Z^3[-(1+u^2)\,T + tuU], \\ \frac{\partial X}{\partial y} &= Z^3[-(1+u^2)\,U + tuV], \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= Z^3[tuT - (1+t^2)\,U], \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= Z^3[tuU - (1+t^2)\,V]. \end{aligned}$$

Ez értékek helyettesítése után a k értékét a következő kifejezés fogja meghatározni:

$$k=Z^6(TV-U^2)(1+t^2+u^2)=Z^4(TV-U^2)=$$
$$=\frac{TV-U^2}{(1+t^2+u^2)^2}.$$

8.

A koordinátarendszer kezdőpontjának s a koordináta tengelyeknek megfelelő választásával el lehet érni, hogy a felület bizonyos A pontjára nézve a t, u, U mennyiségek eltűnjenek. A két első feltétel már az által van teljesítve, hogy az A ponthoz tartozó érintősíkot tesszük a koordinátarendszer xy síkjává. Ha ezenkívül a koordinátarendszer kezdőpontját az A pontba helyezzük, a z koordináták kifejezésére a következő alakhoz jutunk:

$$z=\tfrac{1}{2}T_0x^2+U_0xy+\tfrac{1}{2}V_0y^2+\Omega_0,$$

hol Ω_0 másodrendűnél magasabbrendű. Ha ezenkívül az xy tengelyeket oly M szöggel forgatjuk el, hogy

$$\operatorname{tg} 2M=\frac{2U_0}{T_0-V_0},$$

akkor könnyen be lehet látni, hogy a következő alakhoz jutunk

$$z=\tfrac{1}{2}Tx^2+\tfrac{1}{2}Vy^2+\Omega$$

és ezzel a harmadik feltételnek is elég van téve. Ezekből következik, hogy:

I. Ha a görbe felületet egy merőleges síkkal metszük, mely keresztül megy az x tengelyen, akkor oly sik görbét nyerünk, melynek az A ponthoz tartozó görbületi sugara $\frac{1}{T}$ lesz; s e mellett a pozitiv vagy negativ előjel amaz oldalra vonatkozó concav vagy convex jelleget tünteti fel, a mely oldal felé a z-koordináták pozitivnek vétetnek.

II. Épen így $\frac{1}{V}$ az A pont görbületi sugara arra a görbére vonatkozólag, mely a görbe felületnek az yz-koordinátasíkkal való metszéséből származik.

[231] III. Használva a következő helyettesítéseket $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, lesz

$$z=\tfrac{1}{2}(T\cos^2\varphi+V\sin^2\varphi)r^2+\Omega.$$

A honnan arra következtethetünk, hogy a midőn a görbe felületet oly merőleges síkkal metszük, a mely sík az x tengelylyel φ szöget képez, oly metszési görbe keletkezik, melynek az A ponthoz tartozó görbületi sugara

$$=\frac{1}{T\cos^2\varphi+V\sin^2\varphi}.$$

IV. Innen, ha $T=V$, akkor az *összes* normális metszetekhez tartozó görbületi sugarak egyenlők. Ha azonban T és V különböző értékűek, akkor mivel $T\cos^2\varphi+V\sin^2\varphi$ kifejezés értéke mindenféle φ érték mellett a T és V értéke közé esik, könnyen be lehet látni, hogy az I. és II. pontok alatt említett fősíkokhoz tartozó görbületi sugaraknak bizonyos szélső értékei lesznek, a mennyiben az egyik maximális, a másik pedig minimális értékű görbületi sugár lesz, ha T és V ugyanazon előjelűek, ellenkező esetben pedig, az egyik a legnagyobb domborúságot, a másik pedig a legnagyobb homorúságot adja meg, ha t. i. T és V ellenkező előjelűek. Ezek a következtetések magukban foglalják majdnem mindazt, a mit Euler mondott el először a felületek görbületére vonatkozólag.

V. A görbe felület A pontjában uralkodó görbületi mértéket következő egyszerű kifejezés adja meg $k=TV$; innen tehát következik eme fontos tétel:

A görbe felület egy pontjában a görbületi mértéket oly tört fejezi ki, melynek a számlálója $=1$, a nevezője pedig a normális metszetekhez tartozó két szélső értékű görbületi sugárnak a szorzata.

Egyszersmind világos, hogy a görbületi mérték pozitiv a convex-convex vagy concav-concav felületeknél (e kettő között nincs lényeges különbség), ellenben negativ a concav-convex felületre. Ha egy felület mindkét fajta részt foglal magában, akkor a kettő-nek a határán a görbületi mértéknek el kell tünni. Az oly felületekről, melyeknél a görbületi mérték mindenütt eltünik, később fogunk szólni.

9.

A görbületi mértéknek a 7. §. végén adott kifejezése egyszersmind a görbületi mérték legegyszerűbb kifejezése, mert ez csak 5 elemet tartalmaz. Valamivel bonyolódottabb lesz már a görbületi mértéknek 9 elemet magában foglaló kifejezése, a melyhez [232] akkor jutunk, ha a görbe felületet az első módszer szerint fejezzük ki. Megtartva a 4. §-ban használt jelöléseket, s azután még feltéve hogy

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = R',$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} = P'', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = Q'', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = R'',$$

ugy hogy lesz:

$$dP = P'dx + R''dy + Q''dz,$$
$$dQ = R''dx + Q'dx + P''dz,$$
$$dR = Q''dx + P''dy + R'dz.$$

Mivel $t = -\frac{P}{R}$, differencziálás útján nyerjük, hogy

$$R^2 dt = -RdP + PdR =$$
$$= (PQ'' - RP')\,dx + (PP'' - RR'')\,dy + (PR' - RQ'')\,dz,$$

dz-nek a következő egyenlet:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

által való kiküszöbölése után lesz:

$$R^3 dt = (-R^2P' + 2PRQ'' - P^2R')\,dx +$$
$$+ (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')\,dy.$$

Hasonló eljárással nyerjük, hogy

$$R^3 du = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')\,dx +$$
$$+ (-R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R')\,dy.$$

Ezekből látható, hogy

$$R^3T=-R^2P'+2PRQ''-P^2R',$$
$$R^3U=PRP''+QRQ''-PQR'-R^2R'',$$
$$R^3V=-R^2Q'+2QRP''-Q^2R'.$$

Helyettesítsük ezeket az értékeket a 7. §-ban említett kifejezésbe, akkor a k görbületi mértéket a következő szimmetrikus kifejezés határozza meg:

$$(P^2+Q^2+R^2).k=$$
$$=P^2(Q'R'-P''^2)+Q^2(P'R'-Q''^2)+R^2(P'R'-R''^2)+$$
$$+2QR(Q''R''-P'P'')+2PR(P''R''-Q'Q'')+$$
$$+2PQ(P''Q''-R'R'').$$

10.

Ha a felület kifejezésére a második módszert használjuk, akkor még bonyolultabb kifejezéshez jutunk, mert a kifejezés már 15 elemet foglal magában, [233] mindazonáltal elég fontos ennek a formulának a kifejtése is. Ismét szem előtt tartjuk a 4. §. jelöléseit s azonkívül feltesszük hogy:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}=\alpha,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}=\alpha',\quad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}=\alpha'',$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}=\beta,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial p\partial q}=\beta',\quad \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}=\beta'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}=\gamma,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial p\partial q}=\gamma'.\quad \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}=\gamma'',$$

és hogy:

$$bc'-cb'=A,$$
$$ca'-ac'=B,$$
$$ab'-ba'=C.$$

Figyelembe véve hogy

$$Adx+Bdy+Cdz=0,$$

az-az

$$dz=-\frac{A}{C}dx-\frac{B}{C}dy,$$

hol z-t mint x és y függvényét foghatjuk fel, lesz

$$\frac{\partial z}{\partial x}=t=-\frac{A}{C}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=u=-\frac{B}{C}.$$

Ezenkivül a következő egyenletekből

$$dx=adp+a'dq,$$
$$dy=bdp+b'dq,$$

következtetjük, hogy:

$$Cdp=\quad b'dx-a'dy,$$
$$Cdq=-bdx+ady.$$

Ezek után t és u teljes differencziálja lesz:

$$C^3dt=\left(A\frac{\partial C}{\partial p}-C\frac{\partial A}{\partial p}\right)(b'dx-a'dy)+$$
$$+\left(C\frac{\partial A}{\partial q}-A\frac{\partial C}{\partial q}\right)(bdx-ady),$$
$$C^3du=\left(B\frac{\partial C}{\partial p}-C\frac{\partial B}{\partial p}\right)(b'dx-a'dy)+$$
$$+\left(C\frac{\partial B}{\partial q}-B\frac{\partial C}{\partial q}\right)(bdx-ady).$$

Helyettesítve e képletekbe a bennök előforduló differencziálhányadosoknak következő értékeit:

$$\frac{\partial A}{\partial p}=c'\beta+b\gamma'-c\beta'-b'\gamma,$$
$$\frac{\partial A}{\partial q}=c'\beta'+b\gamma''-c\beta''-b'\gamma',$$
$$\frac{\partial B}{\partial p}=a'\gamma+c\alpha'-a\gamma'-c'\alpha,$$
$$\frac{\partial B}{\partial q}=a'\gamma'+c\alpha''-a\gamma''-c'\alpha',$$
$$\frac{\partial C}{\partial p}=b'\alpha+a\beta'-b\alpha'-a'\beta,$$
$$\frac{\partial C}{\partial q}=b'\alpha'+a\beta''-b\alpha''-a'\beta', \qquad [234]$$

és figyelembe véve, hogy az így származott dt és du differencziálok egyenlők a dx és dy differencziálok bármely értéke mellett a $Tdx+$ $+Udy$, illetőleg az $Udx+Vdy$ kifejezésekkel, akkor néhány átalakitás után nyerjük, hogy:

$$\begin{aligned}C^3T=&\alpha Ab'^2+\beta Bb'^2+\gamma Cb'^2-\\&-2\alpha'Abb'-2\beta'Bbb'-2\gamma'Cbb'+\\&+\alpha''Ab^2+\beta''Bb^2+\gamma''Cb^2,\\C^3U=&-\alpha Aa'b'-\beta Ba'b'-\gamma Ca'b'+\\&+\alpha'A(ab'+ba')+\beta'B(ab'+ba')+\gamma'C(ab+ba')-\\&-\alpha''Aab-\beta''Bab-\gamma''Cab,\\C^3V=&\alpha Aa'^2+\beta Ba'^2+\gamma Ca'^2-\\&-2\alpha'Aaa'-2\beta'Baa'-2\gamma'Caa'+\\&+\alpha''Aa^2+\beta''Ba^2+\gamma''Ca^2.\end{aligned}$$

Ha ezután még a következő rövidített jelölésekkel élünk:

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=D, \qquad 1)$$

$$A\alpha'+B\beta'+C\gamma'=D', \qquad 2)$$

$$A\alpha''+B\beta''+C\gamma''=D'', \qquad 3)$$

akkor lesz:

$$\begin{aligned}C^3T&=Db'^2-2D'bb'+D''b^2,\\C^3U&=-Da'b'+D'(ab'+ba')-D''ab,\\C^3V&=Da'^2-2D'aa'+D''a^2.\end{aligned}$$

E három egyenletből a kivánt müveletek végzése után lesz:

$$C^6(TV-U^2)=(DD''-D'^2)(ab'-ba')^2=(DD''-D'^2)C^2,$$

és innen a görbületi mérték

$$k=\frac{DD''-D'^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}.$$

11.

A most talált képlet alkalmat ad arra, hogy egy másik képlethez jussunk, a mely a görbe felületek elméletében a leggyümölcsözőbb tételek egyikének tekinthető. Hozzuk be a következő jelöléseket: [235]

$$
\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 = E, \\
&aa' + bb' + cc' = F, \\
&a'^2 + b'^2 + c'^2 = G, \\
&a\alpha + b\beta + c\gamma = m, && 4)\\
&a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m' && 5)\\
&a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'', && 6)\\
&a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n, && 7)\\
&a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n', && 8)\\
&a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'', && 9)\\
&A^2+B^2+C^2=EG-F^2=\Delta.
\end{aligned}
$$

Küszöböljük ki az 1), 4), 7), egyenletekből az α, β és γ mennyiségeket, a mit úgy érhetünk el, hogy az említett egyenleteket sorban megszorozzuk $bc'-cb'$, $b'C-c'B$, $cB-bC$-vel, és azután azokat összeadjuk, ily módon az

$$
\begin{aligned}
&[A(bc'-cb')+a(b'C-c'B)+a'(cB-bC)]\,\alpha = \\
&=D(bc'-cb')+m(b'C-c'B)+n(cB-bC),
\end{aligned}
$$

egyenletet kapjuk, melyből könnyen eljuthatunk a következő egyenlethez:

$$AD=\alpha\Delta+a(nF-mG)+a'(mF-nE).$$

Hasonlóképen az α, γ-nak és α, β-nak ugyanazon egyenletekből való kiküszöbölése a következő egyenleteket szolgáltatja:

$$
\begin{aligned}
BD&=\beta\Delta+b(nF-mG)+b'(mF-nE),\\
CD&=\gamma\Delta+c(nF-mG)+c'(mF-nE).
\end{aligned}
$$

Szorozzuk e három utolsó egyenletet rendre α'', β'' és γ''-vel is adjuk őket össze, akkor lesz

$$DD''=(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')\Delta+m''(nF-mG)+n''(mF-nE). \qquad 10)$$

Ha ezek után a 2), 5), 8) egyenletekkel hasonló módon járunk el, akkor lesz:

$$
\begin{aligned}
AD'&=\alpha'\Delta+a(n'F-m'G)+a'(m'F-n'E),\\
BD'&=\beta'\Delta+b(n'F-m'G)+b'(m'F-n'E),\\
CD'&=\gamma'\Delta+c(n'F-m'G)+c'(m'F-n'E).
\end{aligned}
$$

Ez egyenleteket, miután azokat rendre α', β', γ-al megszoroztuk, adjuk össze, s így a következő egyenlethez jutunk:

$$D'^2=(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\,\Delta+m'(n'F-m'G)+n'(m'F-n'E).$$

[236] Ez utóbbi egyenletnek és a 10)-nek egyesítéséből lesz:

$$DD''-D'^2=(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2)\,\Delta+$$
$$+E(n'^2-nn'')+F(nm''-2m'n'+mn'')+G(m'^2-mm'').$$

A használt jelölésekből világos, hogy:

$$\frac{\partial E}{\partial p}=2m,\quad \frac{\partial E}{\partial q}=2m',\quad \frac{\partial F}{\partial p}=m'+n,\quad \frac{\partial F}{\partial q}=m''+n',$$
$$\frac{\partial G}{\partial p}=2n',\quad \frac{\partial G}{\partial q}=2n'',$$

azaz

$$m=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p},\quad m'=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\quad m''=\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$
$$n=\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\quad n'=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},\quad n''=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}.$$

Könnyen belátható még, hogy az

$$\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'^2-\beta'^2-\gamma'^2=\frac{\partial n}{\partial q}-\frac{\partial n'}{\partial p}=\frac{\partial m''}{\partial p}-\frac{\partial m'}{\partial q}=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}$$

egyenlőség is fennáll. Ha ezeket a különféle kifejezéseket helyettesítjük a görbületi mértéknek az előző fejezet végén adott képletébe, akkor a következő kifejezéshez jutunk:

$$4(EG-F^2)^2.k=E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}+\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right]+$$
$$+F\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}+4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right]+$$
$$+G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}+\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right]-$$
$$-2(EG-F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right],$$

a melyben már csak az E, F, G mennyiségek, s ezeknek első és másodrendű differencziálhányadosai fordulnak elő.

12.

Mivel ez az összefüggés:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

minden megszorítás nélkül fennáll, világos hogy a

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}$$

kifejezés a görbe felület ívelemének általános kifejezője. Az előbbi fejezetben levezetett eredmény világosan mutatja, hogy a görbületi mérték meghatározására épenséggel sincs szükségünk ama véges kifejezésekre, melyek az x, y, z koordinátákat [237] a p és q változók függvényeként fejezik ki, sőt arra teljesen elégséges a tetszőleges ívelemek nagyságát meghatározó általános kifejezés.

Nézzük ennek e kiválóan fontos tételnek néhány alkalmazását.

Tegyük fel, hogy a mi görbe felületünk egy másik felületen, mely akár görbe, akár sík-felület, lefejthető úgy, hogy az első felület minden egyes x, y, z-koordináták által meghatározott pontjának, egy meghatározott pont felel meg a második felületen, mely pontnak a koordinátái legyenek x', y', z'.

Természetes, hogy ez esetben x', y', z' is úgy tekinthetők, mint a p és q változók függvényei. Ennek következtében a

$$\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

ívelemet ily kifejezés fogja meghatározni:

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2},$$

hol E', F', G' szintén a p és q függvényei. De a *lefejthetőség* fogalmából következik, hogy azok az ívelemek, a melyek egymásnak megfelelnek a két felületen, szükségképen egyenlők is egymással, és így az egyenlőségeknek

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'$$

kell hogy azonosan elég legyen téve. Az előbbi fejezet képlete tehát önként szolgáltatja a következő fontos tételt:

Theorema. Ha valamely görbe felület egy másik felületre lefejthető, akkor a lefejtés mellett a görbületi mérték változatlan marad az egyes pontokban.

Természetes, hogy a görbe felület minden véges része egy másik felületre való lefejtés után egyszersmind ugyanazt a totális görbületet is megtartja.

A síkon lefejthető görbe felületek e tekintetben oly különös esetek, a melyekre a geometrák már régebb ideje kiterjesztették vizsgálódásaikat. A mi elméletünkből következik, hogy az ilyen felületek minden egyes pontjában a görbületi mérték $=0$-val, miért is ezekre a felületekre nézve, ha ezek a harmadik módon vannak kifejezve, minden pontban fenn fog állani a következő egyenlet:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

mely kriterium, jóllehet már régóta ismeretes, legtöbbször, legalább a mi nézetünk szerint, nem a kivánatos szigorúsággal talál igazolást.

13.

Az előbbi fejezetben levezetett tétel folytán a görbe felületeket egy új szempontból lehet tárgyalni. S ennek az új tárgyalási módnak minél gondosabb fejlesztése valóban megérdemli a geometrák fáradozását. Ha ugyanis a felületeket nem úgy fogjuk fel, mint testeknek a határát [238], hanem azokat oly testeknek tekintjük, a melyeknek egyik dimenziójuk elenyésző kicsiny, s amely testek egyszersmind hajlithatók, de nem nyújthatók, akkor egy felület tulajdonságai részint olyanok, melyek csak attól az alaktól függenek, a melylyel a felület épen bír, részint pedig absolut tulajdonságok, melyek változatlanul maradnak, bármily alakúra hajlítsuk is az illető felületet. Ezekhez az utóbbi tulajdonságokhoz, melyeknek a vizsgálata a geometrák számára egy új és gyümölcsöző teret nyitott, tartozik a görbületi mérték és a totális görbület, oly értelemben, mint a hogy mi értelmezzük ezeket a kifejezéseket; továbbá ezekhez tartozik még a legrövidebb vonalak elmélete és néhány más dolog, miknek a tárgyalását későbbre tartjuk fenn.

Ezzel a felfogással a sík felület, továbbá a síkfelületre lefejthető felületek, mint pl. a henger-, kúpfelület stb. azonos felületeknek vétetnek.

Ily felfogás mellett egy felület általános kifejezésére kiinduló pont gyanánt a

$$\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$$

kifejezés szolgál, mely kifejezés egy ívelemnek és két segéd-változónak az összefüggését fejezi ki. Mielőtt azonban e tárgyba mélyebben behatolnánk, előre kell bocsátani egy adott felületre vonatkozó legrövidebb vonalak elméletét.

14.

Valamely térbeli görbe általában az által van meghatározva, hogy az egyes pontokhoz tartozó koordináták, mint egyetlen egy változónak a függvényei vannak kifejezve, ezt a változót jelöljük w betűvel.

Egy ily görbe vonalnak egy tetszőleges kezdőponttól, bizonyos az x, y, z koordináták meghatározta pontig terjedő távolságát a következő integrál fejezi ki:

$$\int dw \,.\sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Ha most feltételezzük, hogy a görbe helyzetében végtelen kis változás történik, úgy hogy az egyes pontok koordinátái δx, δy, δz-vel változnak meg, akkor az egész hossznak a változása lesz:

$$=\int\frac{dx\,.\,d\delta x+dy\,.\,d\delta y+dz\,.\,d\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

és ezt a kifejezést a következőképen transzformáljuk:

$$\frac{dx.\delta x+dy.\delta y+dz.\delta z}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$-\int\left[\delta x.d\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right)+\delta y.d\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dx^2+dz^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta z.d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right)\right].$$

Arra az esetre, ha a görbe vonal a legrövidebb a végpontok között, ismeretes dolog, hogy el kell tünni az integrál jele alatt levő kifejezésnek [239]. Ha a görbe adott felületen fekszik, a minek a következő egyenlet felel meg:

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

a δx, δy, δz variácziók is eleget kell hogy tegyenek a

$$P\delta x+Q\delta y+R\delta z=0$$

egyenletnek, a honnan könnyen következtethetünk arra, hogy a

$$d\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right),\quad d\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right),$$

$$d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\right)$$

differencziáloknak arányosaknak kell lenni a P, Q, R mennyiségekkel. Legyen továbbá dr a görbének egy eleme, λ a gömbfelületnek az a pontja, mely ennek a görbe elemnek az irányát feltünteti, L pedig az a pont, mely a görbe felület normálisának az irányát határozza meg. Végre legyenek ξ, η, ζ a λ pontnak és X, Y, Z az L pontnak a gömb középpontjára vonatkozó koordinátái.

Ez esetben

$$dx=\xi.dr,\quad dy=\eta.dr,\quad dz=\zeta.dr,$$

a honnan következik, hogy az előbbi differencziálok nem mások, mint $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. És minthogy a P, Q, R mennyiségek az X, Y, Z mennyiségekkel arányosak, a legrövidebb vonalnak a jellemzője az, hogy elég van téve a következő egyenleteknek:

$$\frac{d\xi}{X}=\frac{d\eta}{Y}=\frac{d\zeta}{Z}.$$

Könnyen belátható, hogy

$$\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}$$

egyenlő a gömbfelületnek ama kis ivével, a mely a dr elem kezdet és végpontjához tartozó érintők által képezett szöget méri és így $=\frac{dr}{\rho}$, ha ρ az illető pontban a legrövidebb vonalnak a görbületi sugarát jelöli. Lesz tehát

$$\rho\,.\,d\xi=X\,.\,dr,\quad \rho\,.\,d\eta=Y\,.\,dr,\quad \rho\,.\,d\zeta=Z\,.\,dr.$$

15.

Tegyük fel, hogy a görbe felület valamely A pontjából végtelen sok legrövidebb vonal indul ki. Ezek a legrövidebb vonalok egymástól ama szöggel különböztethetők meg, a melyet minden egyes legrövidebb vonal első eleme képez, annak a vonalnak az első elemével, melyet mi elsőnek tekintünk.

Legyen ez a szög, vagy általában ennek a szögnek egy függvénye φ, továbbá legyen egy ilyen legrövidebb vonalnak az A pontból az x, y, z koordináták által meghatározott pontig terjedő hossza r. Mivel ez esetben az r és φ változók bizonyos meghatározott értékeihez a felületnek bizonyos meghatározott pontjai tartoznak, az x, y, z koordinátákat tekinthetjük az r és φ függvényeinek. A λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z, jelöléseket épen oly értelemben fogjuk használni, mint az előző fejezetben [240], azzal a megszorítással azonban, hogy azok jelenleg a legrövidebb vonalaknak tetszőleges pontjára vonatkoznak.

Az összes legrövidebb vonalak, melyek egyenlő hosszaságúak, egy más görbe vonalig terjednek, mely görbe vonalnak, egy tetszés szerint választott kezdőponttól számított hosszát v-vel jelöljük.

E szerint a v-t is tekinthetjük az r és φ függvényének. És ha λ' a gömbfelületnek ama pontját jelöli, mely megfelel a dv elem irányának, s épen így ξ', η', ζ', e pontnak a gömb középpontjára vonatkozó koordinátáit képviselik, akkor

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\xi'.\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=\eta'.\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=\zeta'.\frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Innen, tekintve hogy:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\xi,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\eta,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\zeta,$$

lesz:

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')\frac{\partial v}{\partial \varphi}=$$
$$=\cos\lambda\lambda'.\frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala, hasonlóképen függvénye az r és φ-nek. Jelöljük ezt a kifejezést S-sel. S-nek r szerint való differencziálása folytán lesz:

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right]}{\partial \varphi}=$$
$$=\frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{\partial \varphi}.$$

De

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$

és így ennek a leszármazott függvénye $=0$, továbbá az előbbi fejezetből tudjuk, hogy ha ρ itt is az r vonalnak a görbületi sugarát jelenti, akkor

$$\frac{\partial \xi}{\partial r}=\frac{X}{\rho},\quad \frac{\partial \eta}{\partial r}=\frac{Y}{\rho},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial r}=\frac{Z}{\rho}.$$

Lesz tehát:

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{1}{\rho}[X\xi'+Y\eta'+Z\zeta']\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{1}{\rho}\cos L\lambda'\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}=0,$$

a honnan könnyen belátható, hogy λ' azon a legnagyobb körön fekszik, a melynek a pólusa L. Innen arra következtethetünk, hogy S független az r-től, és így egyedül a φ-nek függvénye. De az $r=0$ esetre nyilvánvaló, hogy $v=0$, továbbá egyszersmind $\frac{\partial v}{\partial \varphi}=0$, következésképen $S=0$ független φ-től. Kell tehát hogy általában $S=0$ legyen, a honnan $\cos \lambda\lambda'=0$, azaz $\lambda\lambda'=90°$. Az eredményt a következő tételben foglalhatjuk össze:

[241]. *Theorema. Ha egy görbe felület ugyanazon kezdőpontjából meghúzzuk az egyenlőhosszú legrövidebb vonalakat, akkor ezeknek a végpontjait összekötő vonal azok mindegyikére merőlegesen áll.*

Azt tartjuk, hogy érdemes ezt a tételt a legrövidebb vonalak alaptulajdonságából levezetni, ámbár ehhez az igazsághoz eljuthatunk, minden számolás nélkül is, a következő meggondolás alapján. Legyen AB és AB' két egyenlő hosszú legrövidebb vonal, melyek A pontban végtelen kis szöget alkotnak egymással. Feltéve most, hogy ama két szög közül, melyeket a BB' elem képez a BA és $B'A$ vonalakkal, az egyik egy véges nagyságú szöggel különbözné a derékszögtől, akkor a folytonosság törvényénél fogva ama szögek egyike okvetetlenül nagyobb, a másika pedig kisebb volna egy derékszögnél. Tegyük fel, hogy $B=90°-\omega$, s határozzuk meg a BA vonalon azt a C pontot, melyre nézve

$$BC=\frac{BB'}{\sin \omega},$$

ekkor, mivel a végtelen kis $BB'C$ háromszög sík háromszögnek tekinthető,

$$CB'=BC.\cos \omega,$$

és innen

$$\begin{aligned} AC+CB'=AC+BC.\cos \omega=AB-BC(1-\cos \omega)= \\ =AB'-BC(1-\cos \omega), \end{aligned}$$

azaz az A pontból, a B' ponton keresztül haladva, rövidebb úton lehetne C pontba jutni, mint a legrövidebb vonalon, a mi lehetetlen.

16.

Az előbbi fejezet tételéhez egy másikat füzünk, a mely következőképen fejezhető ki:

Ha valamely görbe felületen egy tetszőleges vonalat képzelünk húzva, s ha ennek a vonalnak minden egyes pontjából ugyanazon oldal felé haladó s reá merőlegesen álló végtelen sok egyenlő hosszaságú legrövidebb vonalat huzunk, akkor ezen vonalak mindenike merőlegesen fog állani a másik végpontokat összekötő görbe vonalra. Ennek a bebizonyítására a fentebbi tárgyalás csak annyiban fog megváltozni, hogy φ az *adott* görbének, egy tetszőleges pontjától számított hosszát fogja jelenteni, vagy ennek a hossznak egy függvényét. Az ottani összes következtetések jelenleg is érvényben fognak maradni, azzal a különbséggel, hogy az $S=0$ egyenletnek az $r=0$ esetre való fennállása itt már a feltételekből következik. Különben ez a második tétel általánosabb mint az előző, mert hisz az első tételt úgy tekinthetjük, mint a másodiknak különös esetét, a midőn t. i. az adott görbe vonal, egy az A pont körül irt végtelen kis körvonal. Végre megjegyezhetjük, hogy itt is a számítást egyszerü geometriai meggondolás helyettesíthetné, de mivel ez messze vezetne minket, nem fogunk itt tovább időzni.

17.

Most visszatérünk a

$$\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$$

kifejezéshez [242], mely a görbe felületen fekvő ívelem hosszát minden megszorítás nélkül fejezi ki, és keresni fogjuk az E, F, G együtthatók' geometriai jelentését. Már az 5. fejezetben említettük, hogy a görbe felületen a görbe vonalak két rendszerét képzelhetjük megvonva, az egyik rendszer egyes görbe vonalainál egyedül p a változó és q állandó, míg a másik rendszer vonalaira nézve q a változó és p állandó. A görbe felület valamely pontját úgy lehet tekinteni, mint oly metszési pontot, melyben az első rendszer egy vonala metszi a másik rendszer egyik vonalát, és az illető pontból kiinduló első vonalnak iveleme, mely a dp változásnak felel meg, $=\sqrt{E}.dp$. Épen így a második vonal eleme, mely a dq változásnak felel meg, $=\sqrt{G}.dq$. Jelöljük végre az említett ívelemek által bezárt szöget ω-val, akkor könnyen be lehet látni, hogy

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Továbbá annak a parallelogramm alakú felületelemnek a területe, a mely felületelemet az első rendszer q és $q+dq$ értékekhez tartozó vonala és a második rendszer p és $p+dp$ értékekhez tartozó vonala határoz meg, lesz

$$=\sqrt{EG-F^2}.dp.dq.$$

A felület egy oly vonalához, mely egyik rendszerhez sem tartozik, úgy juthatunk el, ha p-t és q-t egy új változó függvényének, vagy az egyiket a másik függvényének tekintjük. Legyen egy ilyen görbének egy tetszőleges kezdőponttól számított hossza s, akár egyik akár másik irányt tekintve pozitivnek. θ jelölje azt a szöget, melyet a

$$ds=\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$$

elem képez az elem kezdőpontján átmenő, első vonalrendszerhez tartozó vonallal, és hogy minden kétértelmüség el legyen kerülve ennek a vonalnak ama részétől vesszük a szöget pozitivnak, a mely részében a p értéke növekedik, és pedig amaz oldal felé, a merre a q értéke növekedik. E megállapodás után könnyű belátni, hogy

$$\cos\theta.ds=\sqrt{E}.dp+\sqrt{G}.\cos\omega.dq=\frac{Edp+Fdq}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\theta.ds=\sqrt{G}.\sin\omega.dq=\frac{\sqrt{EG-F^2}.dq}{\sqrt{E}}.$$

18.

Keressük most annak a feltételét, hogy ez a vonal egy legrövidebb vonal legyen. Minthogy ennek a vonalnak a hosszát az

$$s=\int\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$$

integrál fejezi ki, a minimum feltétele most azt kivánja, hogy a vonal fekvésében beálló végtelen kis változás mellett a variáczió zérussal legyen egyenlő. Hogy czélhoz jussunk, legmegfelelőbb lesz p-t a q függvényének tekinteni. [243] És így, ha a variácziót a jellemző δ betüvel jelöljük, lesz:

$$\delta s=\int\frac{\left(\frac{\partial E}{\partial p}dp^2+2\frac{\partial F}{\partial p}dpdq+\frac{\partial G}{\partial p}dq^2\right)\delta p+(2Edp+2Fdq)\,d\delta p}{2ds}=$$

$$=\frac{Edp+Fdq}{ds}\delta p+$$

$$+\int\delta p\left\{\frac{\frac{\partial E}{\partial p}dp^2+2\frac{\partial F}{\partial p}dpdq+\frac{\partial G}{\partial p}\partial q^2}{2ds}-d\left(\frac{Edp+Fdq}{ds}\right)\right\}$$

és mint ismeretes, a mi itt az integrál jel alatt van, annak, a δp-től függetlenül el kell tünni. Azaz:

$$\frac{\partial E}{\partial p}dp^2+2\frac{\partial F}{\partial p}dpdq+\frac{\partial G}{\partial p}dq^2=2ds\,.\,d\left(\frac{Edp+Fdq}{ds}\right)=$$

$$=2ds\,.\,d(\sqrt{E}\,.\cos\theta)=\frac{ds\,.\,dE\,.\cos\theta}{\sqrt{E}}-2ds\,.\,d\theta\,.\sqrt{E}\,.\sin\theta=$$

$$=\frac{Edp+Fdq}{E}\,.\,dE-2\sqrt{EG-F^2}.\,dq\,.\,d\theta=$$

$$=\frac{Edp+Fdq}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial p}dp+\frac{\partial E}{\partial q}dq\right)-2\sqrt{EG-F^2}.\,dq\,.\,d\theta.$$

Innen a legrövidebb vonalnak a feltételi egyenlete:

$$\sqrt{EG-F^2}.\,d\theta=\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial p}dp+\frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial q}dq+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp-$$

$$-\frac{\partial F}{\partial p}dp-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq,$$

a mit a következőleg is lehet irni:

$$\sqrt{EG-F^2}.d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}dE + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{\partial F}{\partial p}dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq.$$

Különben a következő egyenlet felhasználásával:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}.\frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}$$

az előbbi egyenletből ki lehet küszöbölni a θ szöget, s ily módon a p és q között differencziál-egyenletet nyerhetünk; ez az egyenlet azonban bonyolódottabb és az alkalmazásnál kevesebb haszonnal jár, mint az előbbi.

19.

A görbületi mértéknek s egy legrövidebb vonal irányváltozásának az általános képlete, miket a 11. és 18. fejezetben vezettünk le, sokkal egyszerübb lesz, ha a p és q mennyiségek úgy vannak megválasztva, hogy az első rendszer vonalai a második rendszer vonalait mindenütt derékszög alatt messék, azaz hogy általában $\omega = 90°$ vagyis $F=0$ legyen. Ekkor a görbületi mértékre lesz: [244]

$$4E^2G^2k = E\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} + E\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 + G\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} + G\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 - \\ -2EG\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right),$$

és a θ szög változására pedig a

$$\sqrt{EG}.d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq.$$

egyenletet kapjuk.

A különféle esetek között, a melyekben az orthogonalitás feltételének elég van téve, az foglalja el az első helyet, melyben a két rendszer egyikének pld. az első rendszernek, összes vonalai legrövidebb vonalak. Ez esetben q-nak egy állandó értéke mellett

$\theta=0$. A szög változásának imént lehozott egyenlete mutatja, hogy $\frac{\partial E}{\partial q}=0$, azaz, hogy az E együtthatóknak függetlennek kell lenni q-tól, a mi annyit tesz, hogy az E vagy állandó vagy pedig egyedül csak p-nek a függvénye. Legegyszerűbb ha p az első rendszer vonalainak a hosszát jelenti. S ha ez esetben az első rendszer öszszes vonalai egy ponton mennek át, akkor legczélszerűbb a vonalak hosszát ettől a ponttól, ha pedig közös metszéspont nem létezik, akkor a második rendszer egy vonalától kell azokat számítani.

Ily megállapodások után világos, hogy p és q jelenleg ugyanazt jelenti, a mit az r és φ fejezett ki a 15. és 16. fejezetekben és hogy $E=1$. Ily körülmények között a két előbbi képlet a következő alakot fogja felölteni:

$$4G^2k=\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2-2G\frac{\partial^2 G}{\partial p^2},$$

$$\sqrt{G}\,.\,d\theta=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq,$$

vagy ha $\sqrt{G}=m$ irunk,

$$k=-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{dp^2},\quad d\theta=-\frac{\partial m}{\partial p}dq.$$

Általában m p és q-nak függvénye, és mdq a második rendszer egy vonalához tartozó ívelemnek a kifejezője. Abban a különös esetben azonban, a midőn az összes p vonalak ugyanazon pontból indulnak ki, $p=0$ esetre, egyszersmind $m=0$ tartozik lenni. Ha továbbá ebben az esetben azt a szöget választjuk q-nak, a melyet az első rendszer valamelyik vonalának az első eleme egy másik tetszőlegesen választott vonalnak az első elemével alkot, akkor p-nek végtelen kis értékére a második rendszer egy vonalának (melyet akkor p sugárral írt körnek lehet tekinteni) az eleme pdq, és innen p-nek végtelen kis értékére egyszersmind $m=p$. A honnan $p=0$ esetre, egyidejűleg $m=0$ és $\frac{\partial m}{\partial p}=1$.

20.

Egyelőre még megmaradunk ama feltétel mellett, hogy p annak a legrövidebb vonalnak a hosszát jelölje, a mely bizonyos A ponttól a görbe felület egy tetszőleges pontjához vonható [245], q pedig azt a szöget, a melyet az előbb említett vonal első eleme, egy az A pontból kiinduló más legrövidebb vonal első elemével képez. Legyen B annak a vonalnak bizonyos pontja, melyre nézve $q=0$ és C egy más meghatározott pontja a felületnek, a mely ponthoz tartozó q érték A-val legyen jelölve. B és C összeköthetők egy legrövidebb vonallal, s ennek B-től számított bizonyos része, mint a 18. fejezetben volt, legyen s. Hasonlóképen úgy mint ott, jelölje θ azt a szöget, melyet egy ds elem a dp-vel képez, s végre legyen θ^0 és θ' a θ értéke a B és C pontban. Ez esetben egy legrövidebb vonalak által határolt háromszög keletkezett a görbe felületen. Ha ennek a háromszögnek B és C-nél levő szögeit B és C-vel jelöljük, a B szög a θ^0 szögnek kiegészítő szöge, míg a C szög akkora lesz, mint θ'. Mivel tárgyalásaink folyamán a szögeket nem fokokkal, hanem puszta számokkal fejezzük ki, úgy hogy az $57°17'45''$-nyi szög, melynél a körív egyenlő hosszú a sugárral, vétetik a szög mérésére mértékegységül, s mert ez esetben 2π a kör kerülete, lesz

$$\theta^0=\pi-B, \quad \theta'=C.$$

Határozzuk meg ennek a háromszögnek a teljes görbületét. Ez lesz:

$$=\int k d\sigma,$$

ha $d\sigma$ a háromszög egy eleme. Mivel azonban ez az elem $mdpdq$, az

$$\int\int kmdpdq$$

integrált az egész háromszögre kell kiterjeszteni.

Ha először p szerint integrálunk, mivel

$$k=-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2},$$

lesz:

$$dq\left(\text{const} - \frac{\partial m}{\partial p}\right),$$

a mi nem más, mint az első rendszer, q és $q+dq$ értékekhez tartozó vonalai közé eső felületnek teljes görbülete. Minthogy ennek a görbületnek $p=0$ esetre el kell tünni, az integrál konstansának $p=0$ mellett $\frac{\partial m}{\partial p}$ értékkel kell birni, azaz $=1$. Az előbbi eredmény tehát

$$dq\left(1 - \frac{\partial m}{\partial p}\right),$$

a hol $\frac{\partial m}{\partial p}$ értékének az veendő, a mi a szóban forgó felület BC vonalon fekvő határainak megfelel. E vonalon azonban, az előző fejezet szerint

$$\frac{\partial m}{\partial p} \cdot dq = -d\theta,$$

és így a kifejezés $dq+d\theta$ alakot veszi fel. A még hátra levő $q=0$-tól $q=A$-ig terjedő integrálás végzése után, a háromszög totális görbülete lesz:

$$=A+\theta'-\theta^{\circ}=A+B+C-\pi.$$

A totális görbület egyenlő a gömbfelület ama részének a nagyságával, mely megfelel a kérdéses háromszögnek, pozitiv vagy negativ előjellel véve a szerint, a mint az a görbe felület, a melyen a háromszög fekszik, concav-concav vagy concav-convex. A terület egysége természetesen az a négyzet, melynek oldala $=1$ (egyenlő a gömb sugarával) és így az egész gömb felülete 4π. E szerint a gömbfelület az a része [246], mely a háromszögnek felel meg, úgy viszonylik az egész gömb felületéhez, mint $\pm(A+B+C-\pi)$ viszonylik a 4π-hez. Ez a tétel, mely a felületelméletnek kétségtelenül legelegánsabb tétele, még így is fogalmazható:

A concav-concav felületnél a legrövidebb vonalak alkotta háromszög szögei összegének 180°-ot meghaladó többletét, vagy a concav-convex felületnél, a legrövidebb vonalak által képezett háromszög szögei összegét 180°-ra kiegészítő hiányt, a gömb-

felületnek az a része méri, mely egyenlő irányú normálisok alkalmazása mellett, megfelel az illető háromszögeknek, ha az egész gömbfelületet 720°-nak vesszük.

Általában minden n oldalú sokszögnél, melynek oldalai legrövidebb vonalak, a szögek összegének $(2n-4)$ derékszöget meghaladó többlete vagy $(2n-4)$ derékszögig számított hiánya, a szerint a milyen a felület görbülete, egyenlő a gömbfelületén levő megfelelő sokszögnek a területével, ha az egész gömb felületét 720°-nak vesszük. Ez a tétel a sokszögnek háromszögekre való felbontása alapján, következik az előbbi tételből.

21.

A p, q, E, F, G, ω most ismét azzal az általános jelentéssel birjanak, mint a mivel eredetileg birtak. Továbbá feltesszük, hogy a szóban forgó felület még egy más módon is meghatározható p' és q' változók segítségével, a mikor is az ívelemet

$$\sqrt{E'dp'^2+2F'dp'dq'+G'dq'^2}$$

fejezi ki. Ez esetben a felületnek minden egyes pontjához, melyet egy bizonyos határozott értékű p és q szab meg, egyszersmind bizonyos határozott p' és q' értékek tartoznak, és így ez utóbbiak p és q függvényei.

E függvények differencziálása után lesz:

$$dp'=\alpha dp+\beta dq$$
$$dq'=\gamma dp+\delta dq.$$

Keressük az α, β, γ, δ együtthatók geometriai jelentését. Erre nézve *négy* vonalrendszert kell felvennünk a görbe felületen, a melyeknél sorjában q, p, q', illetőleg a p' állandók. Képzeljük, hogy a változók p, q, p', q' értékei által meghatározott valamely ponton keresztül meghúzzuk azt a négy vonalat, melyek mindegyike más és más rendszerhez tartozik, a közül a négy közül, melyeket fentebb említettünk, akkor a pozitiv [247] dp, dq, dp', dq' változásoknak megfelelő ívelemek:

$$\sqrt{E}\,.\,dp, \quad \sqrt{G}\,.\,dq, \quad \sqrt{E'}\,.\,dp' \quad \sqrt{G'}\,.\,dq'.$$

Ez elemeknek egy tetszés szerint választott változatlan iránynyal képezett szögei legyenek: M, N, M', N' azzal a kikötéssel, hogy a szögeket amaz oldal felé gondoljuk növekedőknek, a melyen a második elem az első elemen kivül fekszik, úgy hogy $\sin(N-M)$ pozitiv; ezenkivül (a mi szabadságunkban áll) felvesszük, hogy a negyedik elem hasonló fekvésű a harmadik elemre nézve, úgy hogy $\sin(N'-M')$ szintén pozitiv. Vegyünk fel egy másik pontot a felületen, a mely az elsőhöz végtelen közel fekszik, s a mely pont a változók $p+dp$, $q+dq$, $p'+dp'$, $q'+dq'$ értékeihez tartozik, akkor könnyen be lehet látni, hogy általában, azaz függetlenül dp, dq, dp', dq' differencziáloktól,

$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin M + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin N =$$
$$= \sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin N'.$$

E két kifejezés mindegyike az új pontnak a távolságát fejezi ki, attól a vonaltól, a melytől a fenti szögek kezdődnek. Egy már fentebb bevezetett jelölés szerint

$$N-M=\omega,$$

és hasonlóképen

$$N'-M'=\omega',$$

ezenkívül legyen

$$N-M'=\psi.$$

Ez esetben a fenti egyenlet következőleg fejezhető ki:

$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin(M'+\psi)=$$
$$=\sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin M'+\sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin(M'+\omega'),$$

vagy pedig

$$\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin(N'-\omega-\omega'+\psi)+\sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin(N'-\omega'+\psi)=$$
$$=\sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin N'.$$

Mivel ez egyenletnek a kezdeti iránytól függetlenül kell fennállaniok, azért ez utóbbit tetszés szerint lehet megválasztani. Tegyük tehát a második egyenletben N'-t, az elsőben M'-t egyenlőnek 0-sal, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$\sqrt{E'}\,.\sin\omega'.\,dp' =$$
$$= \sqrt{E}\,.\sin(\omega+\omega'-\varphi)\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\sin(\omega'-\psi)\,.\,dq,$$
$$\sqrt{G'}\,.\sin\omega'.\,dq' =$$
$$= \sqrt{E}\,.\sin(\psi-\omega)\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\sin\psi\,.\,dq,$$

s mivel ez egyenletek a

$$dp' = \alpha dp + \beta dq,$$
$$dq' = \gamma dp + \delta dq$$

egyenletekkel azonosak, [248] a meghatározandó α, β, γ, δ együtthatók értékei lesznek:

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'},\qquad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'},$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}}\cdot\frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'},\qquad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},\qquad \cos\omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$
$$\sin\omega = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}},\qquad \sin\omega' = \sqrt{\frac{E'G'-F'^2}{E'G'}},$$

akkor az előbbi négy egyenletet ily alakban is írhatjuk fel:

$$\alpha\sqrt{E'G'-F'^2} = \sqrt{EG'}\,.\sin(\omega+\omega'-\psi),$$
$$\beta\sqrt{E'G'-F'^2} = \sqrt{GG'}\,.\sin(\omega'-\psi),$$
$$\gamma\sqrt{E'G'-F'^2} = \sqrt{EE'}\,.\sin(\psi-\omega),$$
$$\delta\sqrt{E'G'-F'^2} = \sqrt{GE'}\,.\sin\psi.$$

Minthogy a következő háromtagú kifejezés:

a

$$E'dp'^2+2F'dp'dq'+G'dq'^2$$

$$dp'=\alpha dp+\beta dq$$
$$dq'=\gamma dp+\delta dq$$

helyettesítések végrehajtása után az

$$Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2$$

alakba megy át, következik, hogy

$$EG-F^2=(E'G'-F'^2)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.$$

Viszont megfordítva, az utóbbi trinom pedig az

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\,dp=\delta dp'-\beta dq',$$
$$(\alpha\delta-\beta\gamma)\,dq=-\gamma dp'+\alpha dq'$$

helyettesítések után az első trinommá lesz, és innen

$$E\delta^2-2F\gamma\delta+G\gamma^2=\frac{EG-F^2}{E'G-'F'^2}\cdot E',$$
$$-E\beta\delta+F(\alpha\delta+\beta\gamma)-G\alpha\gamma=\frac{EG-F^2}{E'G'-F'^2}\cdot F',$$
$$E\beta^2-2F\alpha\beta+G\alpha^2=\frac{EG-F^2}{E'G'-F'^2}\cdot G'.$$

22.

A megelőző fejezetben foglalt általános tárgyalás alkalmazást talál arra az esetre, ha a p', q' a 15. fejezetben előfordult r és φ mennyiségnek vétetik, míg a p és q megtartják általános jelentésüket. Egyszersmind hozzuk [249] is be az r és φ jeleket, úgy hogy r minden pontra nézve egy határozott ponttól való legrövidebb távolságot és φ pedig azt a szöget jelenti, a melyet ez utóbbi pontban az r első eleme egy kezdeti irány gyanánt választott iránynyal képez. Ekkor

$$E'=1,\quad F'=0,\quad \omega'=90^\circ.$$

S ha feltesszük, hogy

$$\sqrt{G'} = m,$$

akkor az ívelem hossza:

$$= \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}.$$

Ekkor az előbbi fejezetben α, β, γ, δ számára nyert négy egyenletből lesz:

$$\begin{aligned} &1) \quad \sqrt{E}\,.\cos(\omega - \psi) = \frac{\partial r}{\partial p} \\ &2) \quad \sqrt{G}\,.\cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q} \\ &3) \quad \sqrt{E}\,.\sin(\psi - \omega) = m\,.\frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ &4) \quad \sqrt{G}\,.\sin\psi = m\,.\frac{\partial \varphi}{\partial q}. \end{aligned} \qquad [36]$$

Az előbbi fejezet utolsó és utolsóelőtti egyenleteiből pedig

$$5) \quad EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2$$

$$6) \quad \left(E\frac{\partial r}{\partial q} - F\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F\frac{\partial r}{\partial q} - G\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Ez egyenletekből az r, φ, ψ és (ha szükséges) m meghatározhatók p és q segítségével. Ugyanis az 5) egyenlet integrálása megadja r-et, s ha ez már ismeretes, a 6. egyenlet integrálása révén eljuthatunk φ-hez, s az 1. és 2. egyenletek egyike által a ψ-hez, végre a 3. és 4. egyenletek közül akármelyik is elvezet az m értékéhez.

Az 5. és 6. egyenletek integrálása szükségképen két tetszőleges függvényt fog adni, melyeknek jelentése könnyen felismerhető, ha meggondoljuk, hogy azoknak az egyenleteknek az érvényessége nem épen csak a most szóban lévő esetre szorítkozik, hanem hogy azok érvényesek akkor is, ha r és φ a 16. fejezetben előfordult értelmezéssel birnak, úgy hogy r egy legrövidebb vonalnak azt a darabját jelenti, mely egy meghatározott, de tetszőlegesen választott görbére merőlegesen áll, φ pedig e görbéből vett olyan darab hosszának tetszőleges függvénye, mely egy határozatlan legrövidebb vonal és egy meghatározott tetszőlegesen választott pont között fekszik. Az általános megoldásnak mindezeket meghatározatlanul kell hagyni, és a tetszőleges függvények csak akkor lesznek határozottakká, a midőn ama tetszőleges görbe és e görbe darabjának a függvénye, a mit φ képvisel, meg vannak adva. A mi esetünkben a görbe végtelen kis sugárral írt kör, melynek a középpontjától számitjuk az r hosszakat, φ pedig a körvonal egy részének és a sugárnak a hányadosát jelenti [250], a honnan könnyen következtethetünk arra, hogy az 5. és 6. egyenlet a jelen esetben teljesen elégséges, ha arra nézve, a mi határozatlan marad, kikötjük, hogy r és φ ama kezdőpontra és az ehhez végtelen közel eső pontokra nézve eleget tesznek a fentebbi megállapodásoknak.

A mi az 5. és 6. egyenlet integrálását illeti, azokat természetesen vissza lehet vezetni a totál differencziálegyenletek integrálására, mindazonáltal ezek a differencziálegyenletek többnyire oly bonyolódottak, hogy kevés hasznot képesek nyújtani. Ellenben a sorba fejtés semmi nehézséggel sem jár, s a sorok a gyakorlati igényeket teljesen kielégitik, a míg a felületnek nem épen nagy részéről van szó. Ezzel a nyert képletek sok fontos feladat megoldásának bő forrásaivá lesznek.

Itt csak egy példát mutatunk be e módszer lényegének a megvilágitására.

23.

Azt az esetet fogjuk tárgyalni, melynél az összes vonalak, melyekre p állandó, legrövidebb vonalak, s ezek azt a vonalat, a melyre nézve $\varphi=0$, s a mit bizonyos tekintetben abscissa-tengelynek is vehetünk, derékszög alatt metszik. Legyen A az a pont, melyre $r=0$, D az abscissa-tengely egy határozatlan pontja, tehát $AD=p$, B szintén egy *határozatlan* pont azon a legrövidebb vonalon, mely a D pontban merőlegesen áll az AD-re és $BD=q$, úgy hogy némileg a p-t a B pont abscissájának, a q-t pedig ordinátájának lehet tekinteni. Az abscissa-tengely amaz ágán tekintsük az abscissákat pozitivoknak, a melyhez $\varphi=0$ tartozik, míg r-et állandóan pozitivnak vesszük. Az ordinátákat azon az oldalon számítjuk pozitivnak, hol φ 0°-tól 180°-ig növekedik.

A 16. §-ban előforduló tétel szerint:

$$\omega = 90^\circ,\ F=0,\ \text{továbbá}\ G=1,$$

s ezeken kivül még

$$\sqrt{E}=n.$$

Ez esetben n a p és q-nak, oly függvénye lesz mely $q=0$ esetben $=1$. A 18. §-ban felállitott képlet, a jelen esetre alkalmazva azt mondja, hogy minden legrövidebb vonalra kell, hogy a

$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp$$

egyenlet fennálljon; ha θ azt a szöget jelenti, melyet a legrövidebb vonal eleme képez annak a görbének az elemével, melyre nézve q állandó. Mivel pedig az abscissa-tengely maga is legrövidebb vonal és θ értéke minden pontjában 0, világos, hogy $q=0$ esetre kell hogy $\frac{\partial n}{\partial q}=0$ legyen. Ezek után következik, hogy ha n q növekedő hatványai szerint haladó sorban fejthető ki, akkor n-et a következőképen fejezhetjük ki:

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \text{ stb.},$$

a hol f, g, h stb. p-nek függvényei. S ha feltesszük, hogy [251]

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \text{ stb.} \\ g &= g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \text{ stb.} \\ h &= h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \text{ stb.} \end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned} n = 1 &+ f_0 q^2 + f_1 pq^2 + f_2 p^2 q^2 + \text{ stb.} \\ &+ g_0 q^3 + g_1 pq^3 + \text{ stb.} \\ &+ h_0 q^4 + \text{ stb.} \end{aligned}$$

24.

A 22. §. egyenletei folytán jelen esetben lesz:

$$n \sin \psi = \frac{\partial r}{\partial p}, \quad \cos \psi = \frac{\partial r}{\partial q}, \quad -n \cos \psi = m \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

$$\sin \psi = m \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$n^2 = n^2 \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2, \quad n^2 \frac{\partial r}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Ez egyenletek alapján, melyek közül az 5. és 6., a többiben mintegy bennfoglaltatik, az r, φ, ψ, m vagy ezeknek valamely függvénye sorba fejthető. E sorok közül itt azokat fogjuk előállitani, a melyek leginkább figyelemre méltók.

Mivel p és q végtelen kis értékeinél kell, hogy

$$r^2 = p^2 + q^2$$

legyen, az r^2 sora $p^2 + q^2$ taggal fog kezdődni.

A magasabb rendü tagokat a határozatlan coefficziensek módszerével kaphatjuk * meg az

$$\left(\frac{1}{n} \frac{\partial (r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial (r^2)}{\partial q}\right)^2 = 4 r^2$$

egyenlet segítségével.

Ily módon nyerjük, hogy

$$[1] \quad \begin{aligned} r^2 = p^2 + \frac{2}{3} f_0 p^2 q^2 &+ \frac{1}{2} f_1 p^3 q^2 + \left(\frac{2}{5} f_2 - \frac{4}{45} f_0^2\right) p^4 q^2 + \\ + q^2 \qquad &+ \frac{1}{2} g_0 p^2 q^3 + \frac{2}{5} g_1 p^3 q^3 + \\ &+ \left(\frac{2}{5} h_0 - \frac{7}{45} f_0^2\right) p^2 q^4 + \text{stb.} \end{aligned}$$

Továbbá az

$$r \sin \psi = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\partial (r^2)}{\partial p}$$

* A számitásokat, a melyek nehány műfogással rövidithetők, e helyen keresztülvinni fölöslegesnek tartottuk.

képletből nyerjük hogy

$$[2]\quad r\sin\psi = p - \frac{1}{3}f_0pq^2 - \frac{1}{4}f_1p^2q^2 - \left(\frac{1}{5}f_2 + \frac{8}{45}f_0^2\right)p^3q^2$$
$$-\frac{1}{2}g_0pq^3 - \frac{2}{5}g_1p^2q^3 +$$
$$-\left(\frac{3}{5}h_0 - \frac{8}{45}f_0^2\right)pq^4 + \text{stb.}$$

[252] és az

$$r\cos\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(r^2)}{\partial q}$$

egyenletből pedig lesz:

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \frac{2}{3}f_0p^2q + \frac{1}{2}f_1p^3q + \left(\frac{2}{5}f_2 - \frac{4}{45}f_0^2\right)p^4q$$
$$+\frac{3}{4}g_0p^2q^2 + \frac{3}{5}g_1p^3q^2 +$$
$$+\left(\frac{4}{5}h_0 - \frac{14}{45}f_0^2\right)p^2q^3 + \text{stb.}$$

Ez egyenletek egyszersmind a ψ szöget is meghatározzák.

Épen igy a φ szöget legczélszerűbben az $r\cos\varphi$ és $r\sin\varphi$ sorba fejtése utján határozhatjuk meg. Erre szolgálnak a következő parcziális differencziál-egyenletek:

$$\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial p} = n\cos\varphi\sin\psi - r\sin\varphi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial q} = \cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial p} = n\sin\varphi\sin\psi + r\cos\varphi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial q} = \sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$n\cos\psi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sin\psi\,.\,\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0.$$

Ez egyenletek megfelelő összekapcsolásából származik

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial p}+r\cos\psi\,.\,\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial q}=r\cos\varphi,$$

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial p}+r\cos\psi\,.\,\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial q}=r\sin\varphi.$$

Ezekből következik az $r\cos\varphi$ és $r\sin\varphi$ sora, melyeknek az első tagja p és q tartozik lenni, és pedig:

$$[4]\quad r\cos\varphi=p+\frac{2}{3}f_0pq^2+\frac{5}{15}f_1p^2q^2+\left(\frac{3}{10}f_2-\frac{8}{45}f_0^2\right)p^3q^2 \\ +\frac{1}{2}g_0pq^3+\frac{7}{20}g_1p^2q^3+ \\ +\left(\frac{2}{5}h_0-\frac{7}{45}f_0^2\right)pq^4+\text{stb.},$$

$$[5]\quad r\sin\varphi=q-\frac{1}{3}f_0p^2q-\frac{1}{6}f_1p^3q-\left(\frac{1}{10}f_2-\frac{7}{90}f_0^2\right)p^4q \\ -\frac{1}{4}g_0p^2q^2-\frac{3}{20}g_1p^3q^2- \\ -\left(\frac{1}{5}h_0+\frac{13}{90}f_0^2\right)p^2q^3+\text{stb.}$$

A [2], [3], [4], [5] egyenletekből megkaphatjuk az $r^2\cos(\varphi+\psi)$ sorát, s ebből az [1] sorral való osztás által a $\cos(\psi+\varphi)$ sorához lehet jutni, a miből végre magának a $\psi+\varphi$ szögnek a sorát is elő lehet állítani. E sorhoz azonban sokkal elegánsabb uton juthatunk el [252] a következő módon: Differencziáljuk az e fejezet elején felsorolt egyenletek közül az elsőt és a másodikat, akkor nyerjük hogy:

$$\sin\psi\cdot\frac{\partial n}{\partial q}+n\cos\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p}=0,$$

kapcsoljuk ezzel össze az

$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}=0$$

egyenletet, akkor lesz:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial q}+\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial q}=0.$$

Ez egyenletből a határozatlan együtthatók módszerével könynyen elő lehet állitani a $\psi+\varphi$ sorát, ha meggondoljuk, hogy az első tagnak $\frac{1}{2}\pi$-nek kell lenni, minthogy a sugarat választjuk egység gyanánt és 2π a kör kerületét jelenti. A szóban forgó sor lesz:

$$[6]\quad \psi+\varphi=\frac{1}{2}\pi-f_0pq-\frac{2}{3}f_1p^2q-\left(\frac{1}{2}f_2-\frac{1}{6}f_0^2\right)p^3q-$$
$$-g_0pq^2-\frac{3}{4}g_1p^2q^2-$$
$$-\left(h_0-\frac{1}{3}f_0^2\right)pq^3-\text{ stb.}$$

Érdemes még az ABC háromszög területét is sorba kifejteni. E sornak az előállításához a következő feltéti egyenlet vezet:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{r\sin\psi}{n}\int ndq.$$

Ez egyenletben, mely egyszerű geometriai vonatkozások utján vezethető le, S a kérdéses területet jelöli s az integrálás $q=0$-sal kezdődik. Ez egyenletből a határozatlan együtthatók módszerével kapjuk, hogy:

$$[7]\quad S=\frac{1}{2}pq-\frac{1}{12}f_0p^3q-\frac{1}{20}f_1p^4q-\left(\frac{1}{30}f_2-\frac{1}{60}f_0^2\right)p^5q$$
$$-\frac{1}{12}f_0pq^3-\frac{3}{40}g_0p^3q^2-\frac{1}{20}g_1p^4q^2-$$
$$-\frac{7}{120}f_1p^2q^3-\left(\frac{1}{15}h_0+\frac{2}{45}f_2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{60}f_0^2\right)p^3q^3$$
$$-\frac{1}{10}g_0pq^4-\frac{3}{40}g_1p^2q^4$$
$$-\left(\frac{1}{10}h_0-\frac{1}{30}f_0^2\right)pq^5-\text{ stb.}$$

25.

Az előző fejezet képleteiből, melyek a legrövidebb vonalak alkotta derékszögü háromszögre vonatkoznak, átmegyünk azokra a képletekre, melyek általános háromszögekre vonatkoznak. Legyen C [254] ugyanazon DB legrövidebb vonalnak egy másik pontja, melyre nézve, míg p ugyanaz marad, q', r', φ', ψ', S' ugyanazt jelöljék, a mit q, r, φ, ψ és S jelöltek a B pontra vonatkozólag. Ily módon egy A, B, C szögpontokkal biró háromszög jön létre, melynek szögeit A, B, C s a szemközt fekvő oldalait a, b, c betük jelöljék, a területe legyen σ, s az A, B, C pontokban levő görbületi mérték pedig α, β, γ. Továbbá feltesszük még (a mi mindig szabadságunkban áll), hogy p, q, $q-q'$ pozitivok, ekkor

$$A=\varphi-\varphi',\quad B=\psi,\quad C=\pi-\psi',$$
$$a=q-q',\quad b=r',\quad c=r,\quad \sigma=S-S'.$$

Mindenek előtt a σ területet fejtsük sorba. Ha a [7] egyenletben felcseréljük az egyes B pontra vonatkozó mennyiségeket a C pontra vonatkozókkal, akkor az S' képletéhez jutunk, a honnan σ számára következő hatodrendű mennyiségekig terjedő kifejezés jön létre:

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{1}{2}p(q-q')\cdot\Big\{1 &- \frac{1}{6}f_0(p^2+q^2+qq'+q'^2)-\\ &-\frac{1}{60}f_1p(6p^2+7q^2+7qq'+7q'^2)-\\ &-\frac{1}{20}g_0(q+q')(3p^2+4q^2+4q'^2)\Big\}.\end{aligned}$$

E képlet a [2] sor segítségével, mely szerint

$$c\sin B = p\left\{1-\frac{1}{3}f_0q^2-\frac{1}{4}f_1pq^2-\frac{1}{2}g_0q^3-\cdots-\right\},$$

a következőbe megy át:

$$\sigma=\frac{1}{2}ac\sin B.\Big\{1-\frac{1}{6}f_0(p^2-q^2+qq'+q'^2)-$$
$$-\frac{1}{60}f_1p(6p^2-8q^2+7qq'+7q'^2)-$$
$$-\frac{1}{20}(3p^2q+3p^2q'-6q^3+4q^2q'+4qq'^2+4q'^3)\Big\}.$$

A felület bármely pontjában a görbületi mérték (a 19. §. szerint, hol m, p, q ugyanoly jelentésüek, mint jelenleg n, q, p) lesz :

$$=-\frac{1}{n}\frac{\partial^2 n}{\partial q^2}=-\frac{2f+6gq+12hq^2+\cdots}{1+fq^2}=$$
$$=-2f-6gq-(12h-2f^2)q^2-\cdots$$

Innen, mível p és q a B pontra vonatkoznak,

$$\beta=-2f_0-2f_1p-6g_0q-2f_2p^2-6g_1pq-$$
$$-(12h_0-2f_0^2)q^2-\text{ stb.},$$

épen így

$$\gamma=-2f_0-2f_1p-6g_0q'-2f_2p^2-6g_1pq'-$$
$$-(12h_0-2f_0^2)q'^2-\text{ stb.}\ldots,$$
$$\alpha=-2f_0.$$

[255] Ha görbületi mértékek ez értékeit σ sorába behelyettesítjük, akkor a következő hatodrendü tagokig (kizárólag) pontos eredményhez jutunk :

$$\sigma=\frac{1}{2}ac\sin B\Big\{1+\frac{1}{120}\alpha(4p^2-2q^2+3qq'+3q'^2)+$$
$$+\frac{1}{120}\beta(3p^2-6q^2+6qq'+3q'^2)+$$
$$+\frac{1}{120}\gamma(3p^2-2q^2+qq'+4q'^2)\Big\}.$$

A pontosság mit sem fog változni, ha p, q, q' helyébe $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B-a$ teszünk, ekkor lesz :

$$[8]\quad \sigma = \frac{1}{2}\, ac \sin B \Big\{ 1 + \frac{1}{120}\, \alpha\,(3a^2+4c^2-\ 9\,ac\cos B) + \\ + \frac{1}{120}\,\beta\,(3a^2+3c^2-12\,ac\cos B) + \\ + \frac{1}{120}\,\gamma\,(4a^2+3c^2-\ 9\,ac\cos B) \Big\}.$$

Minthogy ez egyenlet semmi olyasmit sem tartalmaz magában, a mi a BC-re merőlegesen húzott AD vonalra vonatkozik, az A, B, C pontokat és mindazt, a mi ezekre vonatkozik, egymás között fel lehet cserélni, úgy hogy hasonló pontossággal lesz:

$$[9]\quad \sigma = \frac{1}{2}\, bc \sin A \Big\{ 1 + \frac{1}{120}\, \alpha\,(3b^2+3c^2-12bc\cos A) + \\ + \frac{1}{120}\,\beta\,(3b^2+4c^2-\ 9bc\cos A) + \\ + \frac{1}{120}\,\gamma\,(4b^2+3c^2-\ 9bc\cos A) \Big\},$$

$$[10]\quad \sigma = \frac{1}{2}\, ab \sin C \Big\{ 1 + \frac{1}{120}\, \alpha\,(3a^2+4b^2-\ 9ab\cos C) + \\ + \frac{1}{120}\,\beta\,(4a^2+3b^2-\ 9ab\cos C) + \\ + \frac{1}{120}\,\gamma\,(3a^2+3b^2-12ab\cos C) \Big\}.$$

26.

Igen hasznos a szóban forgó háromszögnek összehasonlítása az a, b, c oldalakkal biró síkháromszöggel. Ez utóbbi háromszög nek $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$ szögei, a görbe felületen levő háromszög A, B, C szögeitől másodrendű mennyiségekben különböznek. Érdemes ezt a különbséget pontosan kifejezni. Az erre vonatkozó számítást azonban, a mi inkább csak hosszadalmas mint nehéz, itt csak alapvonásaiban visszük keresztül.

Ha az [1], [4], [5] képletekben a B ponthoz tartozó mennyiségeket felcseréljük a C pontra vonatkozó mennyiségekkel, akkor eljutunk r'^2, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$ képleteihez. Ha képezzük a

$$r^2+r'^2-(q-q')^2-2r\cos\varphi\,.\,r'\cos\varphi'-2r\sin\varphi\,.\,r'\sin\varphi'$$

kifejezést, mely

$$= b^2+c^2-a^2-2bc\cos A = 2bc(\cos A^\star-\cos A),$$

s ezt kapcsolatba hozzuk az [256]

$$r\sin\varphi\,.\,r'\cos\varphi'-r\cos\varphi\,.\,r'\sin\varphi' = bc\sin A$$

kifejezéssel a következő képletet nyerjük:

$$\cos A^\star-\cos A =$$

$$= -(q-q')p\sin A\left\{\frac{1}{3}f_0+\frac{1}{6}f_1p+\frac{1}{4}g_0(q+q')+\right.$$
$$+\left(\frac{1}{10}f_2+\frac{1}{45}f_0^2\right)p^2+\frac{3}{20}g_1p(q+q')+$$
$$\left.+\left(\frac{1}{5}h_0-\frac{7}{90}f_0^2\right)(q^2+qq'+q'^2)+\cdots\right\}.$$

Innen $A^\star-A$-nak ötödrendű mennyiségekig terjedő kifejezése:

$$A^\star-A=(q-q')p\left\{\frac{1}{3}f_0+\frac{1}{6}f_1p+\frac{1}{4}g_0(q+q')+\frac{1}{10}f_2p^2+\right.$$
$$+\frac{3}{20}g_1p(q+q')+\frac{1}{5}h_0(q^2+qq'+q'^2)-$$
$$\left.-\frac{1}{90}f_0^2(7p^2+7q^2+12qq'+7q'^2)\right\}.$$

Ha ezt az egyenletet összekötjük a

$$2\sigma = ap\left\{1-\frac{1}{6}f_0(p^2+q^2+qq'+q'^2)-\cdots\right\}$$

egyenlettel és az α, β, γ mennyiségeknek az előző fejezetben nyert értékeivel, akkor $A^\star$-nak következő értékéhez jutunk

$$[11]\quad A^\star=A-\sigma\left\{\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta+\frac{1}{12}\gamma+\frac{2}{15}f_2p^2+\right.$$
$$+\frac{1}{5}g_1p(q+q')+\frac{1}{5}h_0(3q^2-2qq'+3q'^2)$$
$$\left.+\frac{1}{90}f_0^2(4p^2-11q^2+14qq'-11q'^2)\right\},$$

mely kifejezésben ötödrendű mennyiségekig terjedő mennyiségek fordulnak elő.

Hasonló eljárással eljuthatunk a következő kifejezésekhez:

$$[12]\quad B^\star = B - \sigma\Big\{\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{10}f_2p^2 + \\ + \frac{1}{10}g_1p(2q+q') + \frac{1}{5}h_0(4q^2-4qq'+3q'^2) - \\ - \frac{1}{90}f_0^2(2p^2+8q^2-8qq'+11q'^2)\Big\},$$

$$[13]\quad C^\star = C - \sigma\Big\{\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{10}f_2p^2 + \\ + \frac{1}{10}g_1p(q+2q') + \frac{1}{5}h_0(3q^2-4qq'+4q'^2) - \\ - \frac{1}{90}f_0^2(2p^2+11q^2-8qq'+8q'^2)\Big\}.$$

Innen következik, mivel $A^\star + B^\star + C^\star =$ két derékszöggel, hogy $A+B+C$ mennyivel több két derékszögnél, azaz

$$[14]\quad A+B+C = \pi + \sigma\Big\{\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}f_2p^2 + \\ + \frac{1}{2}g_1p(q+q') + \Big(2h_0 - \frac{1}{3}f_0^2\Big)(q^2-qq'+q'^2)\Big\}.$$

Ezt az egyenletet különben a [6] képletből is le lehetett volna vezetni.

27.

[257] Ha a szóban forgó felület R sugarú gömb, akkor

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f_0 = \frac{1}{R^2};\ f_2 = 0,\ g_1 = 0,\ 6h_0 - f_0^2 = 0,$$

tehát

$$h_0 = \frac{1}{24R^4}.$$

Ez esetben a [14] képlet a következő, teljes pontossággal érvényes egyenletté válik

$$[145] \qquad A+B+C=\pi+\frac{\sigma}{R^2}\,\cdot$$

A [11]—[13] képletekből pedig

$$A^\star = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(2p^2-q^2+4qq'-q'^2),$$

$$B^\star = B - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}(p^2-2q^2+2qq'+q'^2),$$

$$C^\star = C - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}(p^2+q^2+2qq'-2q'^2),$$

vagy hasonló pontossággal

$$A^\star = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(b^2+c^2-2a^2),$$

$$B^\star = B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2+c^2-2b^2),$$

$$C^\star = C - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2+b^2-2c^2).$$

Ez egyenletekből, a negyedrendű tagok elhanyagolása mellett, egy ismeretes tétel következik, melyet Legendre mondott ki legelőször.

28.

Az általános képleteink a negyedrendű tagok elhanyagolása után a következő egyszerű alakot öltik fel

$$A^\star = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha+\beta+\gamma)$$

$$B^\star = B - \frac{1}{12}\sigma(\alpha+2\beta+\gamma)$$

$$C^\star = C - \frac{1}{12}\sigma(\alpha+\beta+2\gamma).$$

Igy tehát a nem gömbalakú felületeknél az A, B, C szögek különböző redukcziót igényelnek, hogy a szögek sinusai arányosak lehessenek az oldalakkal.

Ez a különbözőség általában harmadrendű lesz, sőt ha a felület kevéssé különbözik a gömbtől, még magasabb rendű is lehet.

A föld felületén felvett legnagyobb háromszögeknél, melyeknél a szögeket még meglehet mérni, ez a különbség mindig [258] észrevehetlen kicsinynek vehető. Igy pl. a legutóbbi években megmért eddig legnagyobb háromszögnél (Hohehagen, Brocken, Inselsberg), melyre nézve a szögek összegének többlete $=14{\cdot}85348''$ volt, a számítás a következő reductiókat szolgáltatta az egyes szögekre:

Hohehagen	4·95113″
Brocken	4·95104″
Inselsberg	4·95131″.

29.

Végre hasonlítsuk még össze a görbe felületen fekvő háromszögnek területét annak a sík háromszögnek területével, melynek oldalai a, b, c. Legyen ez utóbbi háromszög területe σ^*.

Ez utóbbinak területe

$$\sigma^* = \frac{1}{2}\, bc \sin A^* = \frac{1}{2}\, ac \sin B^* = \frac{1}{2}\, ab \sin C^*.$$

Ismeretes, hogy egészen negyedrendű mennyiségekig

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12}\,\sigma \cos A\,.\,(2\alpha+\beta+\gamma),$$

vagy hasonló pontossággal

$$\sin A = \sin A^* \left\{1 + \frac{1}{24}\, bc \cos A\,.\,(2\alpha+\beta+\gamma)\right\}.$$

Ezt az értéket a [9] képletbe helyettesítve, egész hatodrendű mennyiségekre kiterjeszkedőleg, lesz:

$$\sigma = \frac{1}{2}\, bc \sin A^*.\left\{1 + \frac{1}{120}\,\alpha\,(3b^2+3c^2-2bc\cos A) + \right.$$
$$+ \frac{1}{120}\,\beta\,(3b^2+4c^2-4bc\cos A) +$$
$$\left. + \frac{1}{120}\,\gamma\,(4b^2+3c^2-4bc\cos A)\right\},$$

vagy épen oly pontossággal

$$\sigma=\sigma^{\star}\left\{1+\frac{1}{120}\alpha(a^2+2b^2+2c^2)+\right.$$
$$+\frac{1}{120}\beta(2a^2+b^2+2c^2)+$$
$$\left.+\frac{1}{120}\gamma(2a^2+2b^2+c^2)\right\}.$$

Ez a képlet gömbfelület esetében, a következő alakot ölti fel:

$$\sigma=\sigma^{\star}\left\{1+\frac{1}{24}\alpha(a^2+b^2+c^2)\right\},$$

vagy e helyett a képlet helyett, mint könnyen belátható, hasonló pontossággal lehet a következőt is venni:

$$\sigma=\sigma^{\star}\sqrt{\frac{\sin A\,.\sin B\,.\sin C}{\sin A^{\star}.\sin B^{\star}.\sin C^{\star}}}.$$

Ha ezt a képletet oly háromszögekre alkalmazzuk, melyek nem gömbalakú görbe felületen fekszenek, akkor a hiba, általában véve, ötödrendű lesz. Ez a hiba azonban a föld felületén mérhető háromszögeknél egyáltalában nem lesz észrevehető.

Megjegyzések.*

Gauss «Disquisitiones generales circa superficies curvas» czímű művének előre bocsátott fordításához «Carl Friedrich Gauss Werke. Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1873» IV. kötete szolgált alapul, mely munkának megfelelő lapszámai mindenütt a szöveg között vannak idézve.

4. §. A felületek előállításának második módját, melynél a koordináták két segéd-változónak függvényei, tetszés szerinti felületekre vonatkozólag, legelőször Gauss alkalmazta.

7. §. A görbületi mérték meghatározására teljesen elegendő egy három-

---

* Lásd: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 5. A. Wangerin [Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curves) zon Carl Friedrich Gauss].

szög alakú felületelemet a tárgyalásba bevezetni, mert a felületen felvett végtelen kis idomnak a projekcziójához való viszonya független az idom alakjától.

10. §., 11. §. Az *E, F, G* mennyiségeket elsőrendű, a *D*, *D'*, *D''* mennyiségeket pedig másodrendű alapmennyiségeknek szokták nevezni.

13. §. Gauss a lefejhető felületek más tulajdonságainak tárgyalására vonatkozó igéretét nem váltotta be.

17. §. A felületnek két, a felületen fekvő görbesereg parametereivel való előállítása Gauss óta teljesen meghonosodott, s jelenleg ez a felületek előállításának rendes módja. A felületen előforduló görbék között mint különleges görbék, említést érdemelnek: a görbületi görbék, a negativ görbületi mértékkel biró assymptotikus vonalak, az isometrikus görbék, a melyek a felületet végtelen kis négyzetekre osztják, végre a később, a 19. §-ban tárgyalt görbe rendszerek.

18. §. Gauss itt megelégszik azoknak a differencziál-egyenleteknek a felállításával, a melyektől egy felület geodetikus vonalainak meghatározása függ, a nélkül, hogy egyes felületekre vonatkozólag ezt a meghatározást tényleg keresztülvitte volna.

19. §. Az itt fellépő változókat geodetikus polárkoordinátáknak szokták nevezni, s a görbéket, a melyek az egy pontból kiinduló geodetikus vonalakra merőlegesen állnak, geodetikus köröknek hivják. Hasonlóképen a 16. §. tételéből származó változókat, ha az alapgörbe geodetikus vonal, geodetikus parallel-koordinátáknak nevezik.

21. §. Ennek a fejezetnek az utolsóelőtti képlete Gauss munkáinak IV. kötetében hibás előjellel van ellátva.

23. §-ban a $d\theta$ képletében az előjel hibás.

24. §. Hogy megmutassuk annak a számításnak a menetét, a melylyel az előző fejezetben felállított differencziál-egyenletek közelítő megoldást nyernek, álljon itt az [1] képletnek teljes levezetése, azzal a kikötéssel, hogy csak az ötödrendű tagokig terjeszkedünk ki.

Tegyük hogy

$$r^2 = p^2 + q^2 + R_3 + R_4 + R_5,$$

a hol az *R* indexe az illető tagnak *p* és *q*-ra vonatkozó rendét fejezi ki. Ekkor az ötödik rendet túllépő tagok elhanyagolásával lesz

$$a)\ \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2-4r^2=4\left[p\frac{\partial R_3}{\partial p}+q\frac{\partial R_3}{\partial q}-R_3\right]+$$

$$+4\left[p\frac{\partial R_4}{\partial p}+q\frac{\partial R_4}{\partial q}-R_4+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial p}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial q}\right)^2\right]+$$

$$+4\left[p\frac{\partial R_5}{\partial p}+q\frac{\partial R_5}{\partial q}-R_5+\frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial p}\frac{\partial R_4}{\partial p}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial q}\frac{\partial R_4}{\partial q}\right]=$$

$$=8R_3+4\left[3R_4+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial p}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial q}\right)^2\right]+$$

$$+4\left[4R_5+\frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial p}\frac{\partial R_4}{\partial p}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial q}\frac{\partial R_4}{\partial q}\right];$$

mert egy ismert tételnél fogva

$$p\frac{\partial R_3}{\partial p}+q\frac{\partial R_3}{\partial q}=3R_3 \text{ stb.}$$

Továbbá a negyedrendű tagok elhagyása mellett

$$1-\frac{1}{n^2}=2f_0q^2+2f_1pq^2+2g_0q^3,$$

tehát lesz

$$b)\ \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2=8f_0p^2q^2+8f_1p^3q^2+8g_0p^2q^3+8f_0pq^2\frac{\partial R_2}{\partial p},$$

mely egyenlet, épen úgy mint $a)$, a hatodrendű tagokig terjedő pontossággal bir. Az r meghatározására szolgáló differencziál-egyenlet következőleg irható fel:

$$\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2-4r^2=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2.$$

Az $a)$ és $b)$ kifejezésekben tehát az egyenlőrendű tagoknak egyezni kell. A honnan, minthogy $b)$ harmadrendű tagot nem tartalmaz,

$$R_3=0,$$

továbbá

$$12R_4=8f_0p^2q^2,\quad 16R_5=8f_1p^3q^2+8g_0p^2q^3,$$

és így az [1] képlet igazolva van. Hasonló módon juthattunk volna el a hatodrendű taghoz is.

24. §., [6] képlet. Hogy a jobb oldal első tagja $=\frac{1}{2}\pi$, az a következőkből folyik: A 21. §. szerint $N-M=\omega$, $N-M'=\psi$, tehát $M'-M=\omega-\psi$. Másrészt (r végtelen kis értékeinél) $M'-M=\varphi$ és $\omega=\frac{1}{2}\pi$, tehát $\varphi+\psi=$ $=\frac{1}{2}\pi$.

24. §., [7] képlet. A differencziál-egyenlet, melynek kővetkezménye a [7] képlet, következőképen vezethető le. Hosszabbítsuk meg AB-t $BB'=$ $=dp$-vel, húzzuk meg B'-on át az AB'-ra merőlegesen álló geodetikus vonalat, mely AD-t D'-ban messe. Végre legyen $B'D''=BD$, úgy hogy DD'' merőlegesen áll $B'D'$-ra.

Ekkor, ha ABD az ABD háromszöget területét jelöli, lesz,

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\lim.\frac{AB'D'-ABD}{DD'}=\lim.\frac{BDD'B'}{DD'}=$$
$$=\lim.\frac{BDD''B'}{BB'}.\lim.\frac{BB'}{DD'},$$

mert a $BDD''B'$ felület a $BDD'B'$ felülettől csak másodrendű végtelen kis mennyiségben különbözik. De

$$BDD''B'=dp\int ndq,\quad \text{tehát}\quad \lim.\frac{BDD''B'}{BB'}=\int ndq,$$

továbbá

$$\lim.\frac{BB'}{DD'}=\frac{\partial p}{\partial r},$$

a honnan

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial r}\int ndq,$$

tehát egyszermind

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial r}\int ndq.$$

Végre $\frac{\partial r}{\partial p}$ stb.-nek a 24. §. kezdetén adott értékeiből következik, hogy

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{n}\sin\psi,\qquad \frac{\partial q}{\partial r}=\cos\psi,$$

úgy hogy végre lesz:

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\sin\psi}{n}+\frac{\partial S}{\partial q}\cos\psi=\frac{\sin\psi}{n}\int ndq,$$

a mi bebizonyítandó volt.

25., 26. §. E fejezetek több mellék képlete hibásan fordul elő Gauss összes munkáinak IV. kötetében.

Ezek a hibák a következők: σ első kifejezésében Gauss-nál az utolsó zárójelben ez áll:

$$3p^2+4q^2+4qq'+4q'^2.$$

Itt a $4qq'$ elhagyandó.

Gauss hibás előjelet használ. Az

$$A^{\star} - A = -(q-q')p \,.\, \{\cdots\}$$

egyenlet helyett

$$A^{\star} - A = (q-q')p \,.\, \{\cdots\}$$

veendő.

27. §. Hogy $f_0 = -\frac{1}{2R^2}$, $f_2 = 0$ stb., azt még a következő módon is megkaphatjuk: A gömbre nézve

$$ds^2 = \cos^2\left(\frac{q}{R}\right) . dp^2 + dq^2,$$

tehát

$$n = \cos\left(\frac{q}{R}\right) = 1 - \frac{q^2}{2R^2} + \frac{q^4}{24R^2} - \cdots,$$

azaz

$$f_0 = -\frac{1}{2R^2}, \quad h_0 = \frac{1}{24R^4}, \quad f_1 = g_0 = f_2 = g_1 = 0.$$

28. §. Hohehagen egy hegy Göttingen és Hannöversch-Münden között. A szóban forgó háromszög oldalai körülbelül 69, 85, 107 kilometer hosszúak.

29. §. Az utolsó képlet levezetése. Az előző képletek folytán $\alpha = \beta = \gamma$ esetre

$$\frac{\sin A}{\sin A^{\star}} = 1 + \frac{\alpha}{12} . 2bc \cos A = 1 + \frac{\alpha}{12}(b^2 + c^2 - a^2),$$

innen az a^2 elhanyagolásával

$$\frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\sin A^{\star} . \sin B^{\star} . \sin C^{\star}} = 1 + \frac{\alpha}{12}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\sqrt{\frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\sin A^{\star} . \sin B^{\star} . \sin C^{\star}}} = 1 + \frac{\alpha}{24}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Történeti és bibliografiai adatok.*

A kúpszeleteknek és egyéb görbéknek sok érdekes tulajdonságát ismerték már az ó-korban is. Ezek az ismeretek, noha a mathematikának akkori kezdetleges eszközeit tekintve, az ó-kor geometráinak mély gondolkozásáról és éles elméjéről tanuskodnak, csak összefüggés nélküli ismeretek halmazát

* Lásd: A. Haas (Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmasses), A. Wangerin (Allgemeine Flächentheorie [Disquisitiones generales circa superficis curvas]).

adják, mely ismeretek semmiféle általánosabb törvénynek sem voltak alávetve. A görbe vonalakra és felületekre vonatkozó feladatok általánosabb természetű megoldásának lehetősége csak a XVII. századdal kezdődik, miután DESCARTES bevezette a geometriába az algebra alkalmazását. Ezután már kisérletet tesznek, hogy a görbéknél az érintők irányváltozását, azaz a görbületet is meghatározzák, illetve megmérjék.

A görbületi sugár első nyomait HUYGHENS-nek (1629—1695) az evolvensek és evolutákra vonatkozó dolgozatában (HUYGHENS, Opera varia, Horologii oscillatorii Pars III. Propositio XI. Data linea curva, invenire alium cujus evolutione illa describatur etc.) találjuk. Sőt HUYGHENS a lánczgörbe problemájának megoldásánál (Solutio problematis de linea in quam flexile se pondera etc. pag. 291.) megrajzolja a lánczgörbe alsó tetőpontjában a simuló kört, s ennek a körnek a sugarát görbületi sugárnak nevezi el.

HUYGHENS munkáitól ösztönözve LEIBNITZ (1646—1716) geometriai módszerekkel próbálta megalkotni a görbület elméletét (LEIBNITZ, De natura anguli contactus et osculi. Acta Eruditorum 1686.). LEIBNITZ úgy okoskodott, hogy a görbének bármely pontjához tartozó ívelеme helyettesíthető oly görbének ívelemével, a mely az előbbi görbével az említett pontban oszkulál, s hogy erre a helyettesítésre legalkalmasabb a kör, egyrészt mert a kör minden pontjában ugyanakkora a görbület, de másrészt azért is, mert a kör legkönnyebben szerkeszthető.

A mint az egyenes alkalmas a görbén mozgó pont mozgás irányának a meghatározására, épen úgy alkalmas a kör a görbület mérésére. LEIBNITZ szerint a simuló kört az jellemzi, hogy az érintéspontban legkisebb szöget alkot a görbével, a között a végtelen sok kör között, melyek a görbét az illető pontban a concav oldal felől érintik. A simuló kör legjobban simul a görbéhez, úgy, hogy a simuló kör és a görbe kör között más érintő kör nem létezik. LEIBNITZ az ő munkájában a magasabbrendű oszkulálást is tárgyalja, habár itt már hibás eredményekhez is jutott. BERNOUILLI JAKAB 1692-ben megjelent munkájában (JACOB BERNOUILLI, Addittamentum etc. Acta Erud. 1692) világosan kimutatja LEIBNITZ hibás következtetéseit, s megalkotja az oszkuláczionak teljes elméletét s két más munkájában (Specimen calculi differentialis. Acta Erud. 1691. és Curva laminæ elasticæ. Radii circulorum osculantium etc. Acta Erud. 1694. Januar) a görbületi sugár képletét is meghatározza.

Igen valószinű, hogy NEWTON (1643—1727) már LEIBNITZ előtt ismerte a görbületi kör tulajdonságait, legalább erre mutatnak a centripetalis erőre vonatkozó kutatásai (NEWTON, Principia mathematica I. Liber, Propositio X., XIII. II. Liber Prop. X. etc.). NEWTON a görbületi sugár meghatározására az ő fluxió-módszerét használta fel (Methodus fluxionum. Probl. V. 1671 verfasst, 1736 gedruckt. Conf. Suter, Geschichte de Mathematik. II. B. pag.

75. ff.), s a görbületi mérték változását úgy definiálta, mint a görbületi sugár fluxiójának a viszonyát magának a görbének a fluxiójához. (Methodus fluxionum Probl. VI.) Felismerte továbbá, hogy a görbület a parabolánál változik a legegyszerűbb törvény szerint s épen ezért a körtől eltekintve a parabola legalkalmasabb a görbület meghatározására.

A XVIII. században részint tisztán a DESCARTES-féle módszernek, részint pedig a mindinkább fejlődő infinitezimalis számításnak felhasználásával számos jeles mathematikus foglalkozott a kúpszeletek, a magasabb rendű görbe vonalak és görbe felületek tulajdonságainak kutatásával, a kik között első sorban EULER (1707—1783), JEAN PAUL DE GUA (1712—1785), CRAMER (1704—1752) (SUTER, Geschichte der Math. pag. 314.) és LAGRANGE említendők fel. LAGRANGE, a nagy analytikus, a ki elkerülve a végtelen kicsinyek útját, tisztán algebrai analizissel állapította meg a differenczial- és integrálszámítás-törvényeit és teremtette meg az analitikai függvények egy elméletét, kimutatja (LAGRANGE, Theorie des fonctions, Paris 1796) hogy, ha két görbe valamely közös pontjában az 1., 2., . . . deriváltak egyenlők, akkor a görbék csak ebben az egy pontban esnek össze s nem egyszersmind több más szomszédos pontban is, úgy, hogy a deriváltak egyenlősége csak annyit mutat, hogy a két görbe a közös pont táján oly közel esik egymáshoz, hogy semmiféle más görbe vonal, melyre a deriváltak egyenlősége nem áll fenn, nem eshetik közéjök. Ily módon LAGRANGE a görbe vonalak egymáshoz való közeledését igen finoman különbözteti meg az érintés, oszkulálás stb. esetekkel, a mely eseteket LAGRANGE idejéig az infinitezimalis számítás felfogásával úgy tekintettek, mint kisebb vagy nagyobb terjedelemre vonatkozó összeesést.

A térbeli görbék analytikai elméletét a franczia CLAIRAUT-nak (CLAIRAUT. Conf. SUTER pag, 258.) köszönhetjük. Míg a térbeli görbék görbületi tulajdonságainak mélyebb kutatását legelőször MONGE (MONGE, Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différentes genres d'inflexions etc. Paris 1771.) kisérlette meg. MONGE-al egyidejüleg ez irányban TINSEAU munkálkodik (TINSEAU, Solution de quelques problèmes relatifs à la theorie des surfaces courbes etc. Mémoire de l'Académie IX. Tome.), a ki az oszkuláczió síkjának fogalmát vezette be a geometriába. Lényegesen más alapra támaszkodva foglalkozik LAGRANGE a térbeli görbék elméletével. FOURIER (FOURIER, Mémoires présentés à l'institut. Tome I. 1805 pag. 420.) a sík görbéknek megfelelőleg, két végtelen közel eső normális sík alkotta szögnek és e normális síkok közé eső ívnek a viszonyát *első görbületnek* és két szomszédos ponthoz tartozó simuló sík alkotta szögnek, torsio szögnek, a megfelelő görbe elemhez való viszonyát *második görbületnek* nevezi. Az így definiált új mennyiségek analitikai kifejezése LANCRET-től származik (LANCRET, Mémoire sur les courbes à double courbure. T. I. II.

Mémoires présentés a l'institut etc.). A térbeli görbékre vonatkozólag nevezetes kutatásokat végeztek még LIOUVILLE (MONGE, Application à l'analyse pag. 544—558. 576.), PUISEUX, kik bebizonyították, hogy a térbeli görbék, melyeknek mindkét görbülete állandó, csakis egyenes körhengerre írt csavarvonalak lehetnek. ıovábbá BERTRAUD és SERRET kimutatták, hogy a kupra írt csavarvonal az egyedüli térbeli görbe, melynél állandó viszony van a görbület és torzio sugarai között.

Miután a simuló körök segítségével meg lehetett már határozni a görbe vonalak egyes pontjait jellemző görbületet, igen természetes, hogy a mathematikusok figyelmüket e tekintetben a görbe felületekre fordították.

EULER volt az első, a ki némi világot vetett a felületek görbületi viszonyaira. EULER szerint (EULER, Recherches sur les courbes des surfaces. Histoire de l'académie royale à Berlin 1760.) a gömböt kivéve, melynél a legnagyobb kör méri a görbületet, nem szólhatunk valamely pontban uralkodó görbületről, mert a felület minden pontjában számtalan sok különböző görbület lép fel, elannyira, hogy a felület bizonyos irányban concav, egy más irányban pedig convex is lehet, mint pld. nyereg alakú felületeknél. A görbe felület minden egyes pontjához a számtalan sok normális metszeten kívül még, mindegyik normális síknak megfelelőleg, számtalan sok ferde metszet is tartozik, t. i. egy normális síknak és az érintő síknak metszési vonalán át számtalan sok sík fektethető, melyek különböző szög alatt hajolnak a normális metszethez. EULER azt tartotta, hogy a normal-metszetekhez tartozó görbületek összessége már képet nyújt a felület egyes pontjaiban fellépő görbültségről. EULER állapította meg a következő törvényeket:

1. A felület valamely pontján átmenő normal-metszetekhez tartozik egy maximális és minimális értékű görbület.

2. A maximális és minimális görbületekhez tartozó normális síkok úgynevezett fősíkok, merőlegesen állanak egymásra.

3. A maximális és minimális görbületekből, a maximális görbületet magában foglaló fősíkkal φ szöget képező normal-metszetben fellépő görbületet, következő összefüggés alapján lehet kiszámítani:

$$\rho_\varphi = \rho_{\max} \cos^2 \varphi + \rho_{\min} \sin^2 \varphi.$$

EULER-nek ezek a törvényei alapvető jelentéségűek a görbületek elméletében.

A ferde metszetekhez tartozó görbületek törvényét MEUSNIER ismerte fel először (MEUSNIER, Mémoire sur la courbure des surfaces 1776. Mémoires de l'academie royale des sciences Tome X.). E törvény szerint, ha az érintősík egyugyanazon érintő vonalán átmenő normalis és ferde metszetekhez tartozó görbületi sugarak R_1 és R, akkor e két görbületi sugár között a következő reláczió áll fent:

$$R = R_1 \sin \varphi,$$

hol φ a ferde síknak az érintő síkkal képezett hajlásszögét fejezi ki.

EULER-nek és MEUSNIER-nek fentebb említett törvényei csak a görbületnek a felület egy pontja körül való elosztásáról adnak felvilágosítást, de a görbületi mértéknek fogalmát nem állapítják meg.

LAGRANGE (LAGRANGE, Theorie des fonctions, Paris 1796.) kiindulva onnan, hogy a simuló felületeknél az érintési pontra nézve meg kell egyezni az első- és másodrendű differencziál-hányadosoknak, arra az eredményre jut, hogy a felületi pontokhoz általában véve nem is lehet találni simuló gömböt. Ellenben egy megfelelően választott körívnek a húrja körül való forgatásából származott forgási felület simulni fog az érintési pontban a görbe felülethez.

A simuló paraboloidokat OLIVIER (OLIVIER, Journal de l'ecole polyt. Cahier 25.) tette gondos tanulmánya tárgyává.

DUPIN (DUPIN, Développements de géometrie, Paris 1813.) a simuló paraboloidot olyan felületetnek tekinti, mely másodrendű érintkezése révén az érintési pont körül összeesik a felülettel. Az érintő síkhoz végtelen közel felvett párhuzamos sík a simuló paraboloidot oly másodrendű görbében metszi, mely egyszersmind az eredeti felülethez is tartozik. Ezt a görbét nevezi DUPIN indicatrixnak, mely ellipszis, hyperbola vagy parallel egyenes pár, a szerint a mint

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 \lesseqgtr \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

feltéve, hogy a koordinátarendszer z-tengelye a felület normálisával összeesik.

A felületi görbületmérés problomájának megoldására, a min annyi jeles mathematikus iparkodása meghiusult, a nők sorából is akadt egy vállalkozó. A mathematikailag képzett GERMAIN SOPHIE (GERMAIN, Crelle's Journal VII. k. Bulletin des sciences math. 1831.) a főgörbületi-sugarak reciprok értékének fél összegét (az úgynevezett közepes görbültséget) ajánlotta a görbület kifejezésére, de e tekintetben nem talált követőkre. Később miután GERMAIN rájött arra a tételre, hogy az egymásra merőlegesen álló metszetek görbületeinek összege egyenlő a főgörbületek összegével — a mi különben igen egyszerű folyománya a 3. EULER-féle tételnek — s a mely GERMAIN-féle tételnek következménye, hogy az összes normál metszetek görbültségeinek számtani közepese egyenlő a főgörbültségek számtani közepesével, még inkább iparkodott ajánlatát érvényre juttatni.

A felületi görbületnek problemáját GAUSS K. F.-nek, a legnagyobb mathematikusnak, sikerült ép oly geniálisan, mint egyszerűen megoldani. Gauss-nak ez, az előzőekben bemutatott, korszakalkotó munkája, mely valóban mintaszerű az összes mathematikai irodalomban, ha eltekintünk is attól, hogy annak a révén jutott megoldásra a felületek görbületének kérdése, igen nagy jelentőséggel bir, részint azért, mert új irányt jelöl ki a görbe felületek tanulmányozásához, részint pedig azért, mert számos új és fontos tétellel gazdagította a tudományt. Már a felületeknek az az előállítási módja, hogy a koordináták két segédváltozónak függvényei egy egész sereg új ismeretnek szolgál forrásául. Nagyon fontos (6. §.) *a görbületi mérték* és *a teljes görbültség* fogalmának megállapítása. Ezekre vonatkozólag Gauss a «Göttinger Gelehrten Anzeige»-ban így nyilatkozik: «Minél kevésbé tér el a görbe felület egy része a síktól, annál kisebb felület felel meg annak a gömb felületén, és így mi sem természetesebb, mint az, hogy a görbe felület egy részének a teljes görbültségét a gömb felület megfelelő részének a területével mérjük. A felületrészek nagysága mellett azonban azoknak a fekvését is figyelembe kell venni, a mi eltekintve a nagyságuktól, a két felületrésznél lehet megegyező, vagy pedig fordított; ezt a két esetet a teljes görbültség elé tett pozitiv vagy negativ előjel különbözteti meg. A görbe felület és a segéd gömbfelület két megfelelő darabjának területéből származó viszony egy új fogalomhoz vezet (épen úgy, mint pl. a tömeg és térfogat összehasonlításából származik a sűrűség fogalma)» s ez a görbületi mérték. Csakis ennek a fogalomnak a bevezetésével van szigorúan értelmezve a felületi görbültségnek eddig bizonytalan kifejezése és pedig a görbe vonal görbületi fogalmával teljesen analog módon.

Igen fontos továbbá, hogy a felületek tulajdonságai két csoportra oszthatók t. i. olyanokra, melyek a felületek bizonyos határozott alakjához fűződnek és olyanokra, melyek a felület hajlítása mellett változatlanul megmaradnak (13. §.). A levezetett új tételek között kiváltképen említésre méltók: bebizonyítása annak, hogy a görbületi mérték nem változik a felület hajlításával (11., 12. §.) a 15. és 16. §-oknak a geodetikus vonalakra vonatkozó tételei, a 20. §. tétele, végre az utoljára levezetett eredmények, melyek a geodetikus vonalak alkotta háromszög és az ezzel egyenlő hosszúságú oldalakkal biró síkháromszög között fent álló összefüggést állapítják meg.

A «Disquisitiones generales circa superficies curvas» legelőször 1828-ban jelent meg Göttingenben a «Commentationes societatis regiæ scientiarum Gottingensis recentiores Vol. VI. (ad a. 1823—1827)»-ben, Commentationes classis mathematicæ p. 99-től p. 146-ig. Ez az eredeti munka. Ez a munka később függelékként ismét kinyomatott Monge «Application de l'analyse à la géometrie» (Paris 1850.) czímű munkájának Liouville-től kiadott ötödik kiadásában, GAUSS munkáinak IV. kötetében (Göttingen, 1873.), ez képezi az alapját ennek a fordításnak.

Franczia fordításban található a «Nouvelles Annales de Mathemat. T. XI»-ben. BÖKLEN «Analytische Geometrie des Raumes» czímű munkájában (2. Aufl, Stuttgart 1884.). Maga GAUSS is közölt egy mutatványt e munkájából.

Az újabb időben CASORATI (Rendiconti del R. Instituto Lombardo, Serie II., Vol. XXII., Fasc. VIII., 1889.) megkisérlette a görbületi mértéknek GAUSS-tól eredő definiczióját egy másikkal helyettesíteni, t. i. a görbületi sugarak négyzeteinek reczíprok értékeiből alkotott összegnek a felével. E felfogás mellett a henger és kúp felületek szintén a görbe felületek közé tartoznak, míg a GAUSS-féle értelmezés szerint a hengernek és kúpnak minden pontjában 0 a görbületi mérték. Hogy ezt az új értelmezést azonban általánosan elfogadnák, az igen kétséges, különösen akkor, a midőn a GAUSS-féle értelmezésnek annyi előnye van előbbi fölött.

GAUSS-nak munkája világot vetett oly kérdésekre is, melyek a geometriának, mondhatni, alapját érintik. GAUSS után már világos, hogy az egyenesek és parallelák postulatuma átvihető oly felületek geodetikus vonalaira, a melyeken a görbületi mérték állandóan 0, a mi más szóval annyit tesz, hogy az ilyen felületekre alkalmazható a planimetria és a sík-trigonometria. Épen oly világos az is, hogy az oly felületek, melyeken a görbületi mérték állandó pozitiv értékű, mint a milyen a gömb is, már külön geometriát igényelnek és pedig az ismeretes sphærikus trigonometriát, melynek tételei azonban átalakulnak a planimetria tételeivé, mihelyt a gömb sugara végtelen nagynak vétetik.

GAUSS (GAUSS, Briefwechsel mit Schuhmacher), LOBATSCHEWSKY (Kasaner Boten, 1829. Neue Anfangsgründe der Geometrie nebst einer vollständigen Theorie der Parallelen. Kasan 1836—1838. Geometrie imaginaire. Crelle's Journal Bd. 17. Theorie der Parallelen 1840. Die Pangeometrie. Kasan 1855.) BOLYAI (BOLYAI, Tentamen juventutem studiosum in elementa matheseos puræ etc. Maros-Vasarhely 1832. Conf. FRISCHAUF Absolute Geometrie. Leipzig 1876.), BELTRAMI (BELTRAMI, Saggio di interpretazione della geometrica non euclidea. VI. Band des «Giornale»), MINDING (MINDING. Journal v. Crelle 20. Band, pag. 325,) foglalkoztak ama felületek és terek geometriai viszonyaival, melyeken a görbületi mérték értéke egy állandó negativ szám, s ezzel meg volt vetve az absolut geometriának az alapja.

A görbületi mérték fogalmát az utolsó húsz év alatt kiterjesztették a három és többdimenziójú sokaságokra is. De e tekintetben különböző bővítések lehetségesek. Ezek közül a legfontosabbak RIEMANN-tól («Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», Götting. Abhandl.

XIII., 1868., RIEMANN's Werke, herausgegeben von H. WEBER, Göttingen 1876, p. 254.) továbbá KRONECKER-től («Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln», Monatsber. der Berl. Akad. 1869.) származnak, a melyeket LIPSCHITZ is elfogadott (Borchardt Journ. Bd. 71. und Bd. 81.) E tekintetben figyelemre méltó még KILLING munkája («Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung» Leipzig 1855.).

PLÜCKER a görbületi mértéket a felület oly pontjaiban határozza meg, melyekben az érintősík magasabb rendű érintkezésben van a görbe felülettel. (PLÜCKER, Crelle J. Bd. III) A felületek singularis pontjaiban uralkodó görbültséget ujabban DE SALVERT tárgyalja (Annales de la sociéte scientif. de Bruxelles VII., 1882.).

A 8. §. fejezetnek 5. tételéhez STURM R. (Mathemat. Annal. XXI. p. 379. 1883.) a következő Analogont fűzi: «Ha a felület valamely P pontja körül egy végtelen kis sugárral írt gömböt képzelünk, s e gömbtől kivágott metszési görbének párhuzamos normalisokkal a képét állítjuk elő a gömbfelületen, akkor a két görbe kerületéből alkotott viszony határértéke a P pontban uralkodó közepes görbültség lesz.» A másodrendű alapmennyiségek helyett HOPPE («Principien der Flächentheorie», GRUNERT Archiv Bd. 59.; mint külön lenyomat is megjelent,, Leipzig 1876) más mennyiségeket vezetett be, melyek a GAUSS-féle jelölések szerint a következők:

$$\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}};$$

a HOPPE-féle alapmennyiségeket KNOBLAUCH is elfogadta («Einleitung in die allgemeine Theorie der Flächen», Leipzig 1888). BOUR és LIPSCHITZ még másféle alapmennyiségeket használnak azokban a munkákban, melyeket alább fogunk felemlíteni.

HOPPE (a fentebb említett munkájában és ESCHERICH (GRUNERT Arch. Bd. 57) a K értékének a 10. §-ben talált kifejezését közvetlenül vezetik le. a nélkül, hogy a 7 §-ban előfordultakra támaszkodnának.

LIOUVILLE (Journ. d. Mathém. XII. és MONGE előbb említett munkájának függeléke) megmutatta, hogy bizonyos különös változók felhasználásával, a 11. §-ban előforduló eredmény egyszerűbb alakot ölt fel. Ismét más alakban fordul elő a szóban forgó képlet WEINGARTEN-nál (lásd alább).

A 12. §. fontos tételét BERTRAND és PUISEUX (LIOUVILLE J. XII., továbbá MONGE munkájának LIOUVILLE-féle kiadásában előforduló függelék IV. jegyzete) számítással vezették le egy igen kis sugárral írt geodetikus körfelület kerületéből, DIGUET pedig tökéletesítette ezt a levezetést az ily felület területének a figyelembe vétele révén. Másféle bizonyításokat használ BELTRAMI (Atti d. Ateneo Veneto V., 1869) és CHELINI (Mem. di Bologna [2] VIII., 1868).

Tanulságos példát nyújt az egymásra lefejthető felületekre a catenoid és a torz-csavarfelület. Mint más példák különösen említésre méltók az állandó görbületi mértékkel biró felületek. Ezeket tanulmányozták: BELTRAMI (BRIOSCHI Annali di Matem. [1] VII., [2] II.; BATTAGLINI Giornale VI.), SCHLÄFLI (BRIOSCHI Ann. [1] V.), DINI (BATTAGLINI Giorn. V.), ENNEPER (Göttinger Nachr. 1868, 1876), LIE (Arch. for Math. og Nat. IV., V., Christiania 1879, 1880), WEINGARTEN (KRONECKER Journ. Bd. 84, 95), BIANCHI (Math. Ann. XVI., BATTAGLINI, Giorn. XX.).

Az állandó görbületű felületek annyiban játszanak fontos szerepet, a mennyiben azokra a GAUSS-féle tétel megfordítása is érvényes; azaz, ha két felület minden pontban egyenlő állandó görbületmértékkel bir, akkor azok egymásra lefejthetők, míg ellenben két, változó görbületmértékkel biró felületnél, a megfelelő pontok görbületmértékének egyenlősége még nem elégséges mérték a lefejthetőségre. (Lásd: MINDING, Crelle Journ. Bd. 19.).

Minthogy GAUSS után a felületek lefejthetőségére vonatkozólag igen gazdag irodalom fejlődött ki, e helyen csak a legfontosabb munkákra utalunk, a nélkül, hogy azok tartalmának tárgyalásába bocsátkoznánk.

Kiválóképen a következő szerzők méltók az említésre:

BOUR (Journ. de l'école polytechn. Bd. 22. [Cah. 39.] 1862), BONNET (Journ. de l'école polyt. Bd. 24., 25. [Cah. 41. 42.] 1865, 1867; LIOUVILLE Journ. XVI.), AOUST (Comptes rend. 1850, 1862, 1863, 1868; BORCHARDT Journ. Bd. 58.), BELTRAMI (BATTAGLINI, Giorn. Bd. II. III., Memor. d. Bologna [2] VIII., Mathemat. Ann. I.), DINI (BRIOSCHI, Annali di Mat. [2] IV.), ENNEPER (Götting. Nachr. 1874, 1875), LIPSCHITZ (Ber. d. Berl. Akad. 1882, 1883), WEINGARTEN (BORCHARDT Journ. Bd. 59; Festschrift der technischen Hochschule zu Berlin 1884; KRONECKER, Journ. Bd. 100., Ber. d. Berl. Akad. 1886).

GAUSS a lefejthető felületek más tulajdonságainak tárgyalására vonatkozó igéretét nem váltotta be. Ellenben MINDING megmutatta, hogy a felületek hajlításával az u. n. geodetikus görbület, t. i. annak a viszonynak a határértéke, a mely fennáll egy ívelem és két egymásra következő geodetikus érintő által képezett szög között, változatlan marad (Crelle Journ. Bd. VI.).

A legrövidebb vonalaknak a 14. §-ban levezetett alaptulajdonságát, hogy t. i. azoknak a főnormálisa mindenütt összeesik a felület normalisával, legelőször EULER ismerte fel («Methodus inveniendie lineas curvas maximi minimire proprietate gaudentes» etc. Lausannæ 1744).

GAUSS itt nem tesz különbséget a tulajdonképeni legrövidebb vonalak és a geodetikus vonalak között. JACOBI mutatta ki legelőször, hogy ez a megkülönböztetés szükséges (Crelle Journ. Bd. XVII., Gesammelte Werke, Bd. IV., p. 49., 50.; Vorlesungen über Dynamik p. 46., 47.). Hogy egy geodetikus vonal két pontja között mikor nem lesz legrövidebb vonal, ezt a kérdést kimerítően tárgyalják Braunmühl (Math. Annal. Bd. XIV.) és Mangoldt (Kronecker Journ. Bd. 91.).

Jacobi (Crelle Journ. XIX. Gesammelte Werke Band. II. p. 59.; Vorlesungen über Dynamik, Vorl. 28.) a háromtengelyű ellipsoid geodetikus vonalait egészen más módszer alapján határozza meg. Ugyancsak erre a tárgyra vonatkozólag egy más irányú kutatás van Liouville-től (Zusätze zu Monge, Note III.), ki megmutatta, hogy a geodetikus vonalakat a felületek egy nagy osztályánál quadratura útján lehet meghatározni.

Dorboux (C. R. Bd. 96, 1883) a geodetikus vonalak mintájára tárgyalja az állandó geodetikus görbülettel biró görbéket.

A 20. §. fontos tételét Jacobi (Crelle Journ. XVI. p. 344) következőképen általánosította: Három tetszőleges térgörbe képezzen egy háromszöget, s ezek a térgörbék csak annak a megszorításnak legyenek alávetve, hogy két-két görbe a metszési pontban közös főnormalissal birjon. Ha most a segédgömb középpontjából parallel sugarakat huzunk a háromszög kerületének minden egyes főnormálisához, akkor ezek a sugarak a gömbfelületen egy második háromszöget határoznak meg, melynek területe az adott háromszög szögeiből alkotott összegnek π-t túllépő többletével, vagy azzal a hiánynyal egyenlő, a mely kiegészitené a szögek összegét π-re.

Kis geodetikus háromszögeknek és az ezek oldalaival egyenlő hosszú oldalakkal biró sík háromszögeknek az összehasonlítását, a következő magasabb rendű tagok figyelembe vétele mellett tovább fejtették Hansen (Geodetische Untersuchungen, 1865), Schering (Götting. Nachr. 1867), Weingarten (Astronomische Nachr. Bd. 1869). Továbbá a geodetikus háromszögek elméletét tovább fejlesztették Christoffel (Abhandl. d. Berl. Akad. 1868), Weingarten (Ber. d. Berliner Akad. 1882), Brill (Münch. Abhandl. 1883), Mangoldt (Crelle Journ. Bd. 1883).

BOLYAI FARKAS NÉVTELENÜL MEGJELENT «TENTAMEN JUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESEOS PURÆ, ELEMENTARIS AC SUBLIMIORIS, METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA, INTRODUCENDI» CZIMŰ MUNKÁJÁNAK ELSŐ KÖTETÉHEZ CSATOLT FÜGGELÉKE.

A TÉRNEK ABSOLUT IGAZ TUDOMÁNYA,

A MELY FÜGGETLEN EUKLIDES (A PRIORI SOHA BE NEM BIZONYITHATÓ) XI. AXIOMÁJÁTÓL.

EZT KÖVETI

A KÖR GEOMETRIAI QUADRATURÁJA

EZ AXIOMA HELYTELEN VOLTÁNAK ESETÉBEN.

SZERZŐJE

BOLYAI BOLYAI JÁNOS

KAPITÁNY A CS. KIR. OSZTRÁK HADSEREG MÉRNÖK-KARÁBAN

(MAROSVÁSÁRHELY, 1832).

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

FORDITOTTA

RADOS IGNÁCZ.

BUDAPEST.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT.

1897.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A jelek magyarázata.

$\overline{ab}$ jelöli *mindama* pontoknak *összességét*, a melyek a-val és b-vel ugyanabban az egyenesben feküsznek.

$a\bar{b}$ « az a-ban két részre fölosztott $\overline{ab}$ egyenesnek azt a felét, a mely a b pontot tartalmazza.

$\overline{abc}$ « *mindama* pontoknak *összességét*, a melyek (a nem ugyanabban az egyenesben fekvő) a, b, c pontokkal ugyanabban a síkban vannak.

$ab\bar{c}$ « az $\overline{ab}$ egyenes által két részre fölosztott síknak azt a felét, a mely a c pontot tartalmazza.

abc « a *kisebbiket* ama részek közül, a melyekre a $b\bar{a}$ és $b\bar{c}$ egyenesekből álló pár $\overline{abc}$-t fölosztja; vagyis azt a *szöget*, a melynek szárai $b\bar{a}$, $b\bar{c}$.

$abcd$ « (ha d abc-n belül fekszik és $b\bar{a}$, $c\bar{d}$ egymást nem metszik) abc-nek azt a részét, a melyet $b\bar{a}$, bc, $c\bar{d}$ határolnak; $bacd$ ellenben jelenti $\overline{abc}$-nek azt a részét, a mely $\overline{ab}$ és $\overline{cd}$ között fekszik.

$\llcorner$ jelentése: merőleges.

R « derékszög.

$ab \triangleq cd$ jelenti, hogy $cab = acd$.

$\equiv$ jelentése: congruens.*

$x \frown a$ jelenti, hogy x az a határ felé tart.

$\bigcirc\, r$ « az r radiussal leírt kör kerületét.

$\odot\, r$ « az r radiussal leírt kör területét.

Fordító megjegyzése. A [ ] zárójelekben foglalt számok jelentik az eredeti szöveg lapszámait.

---

* Legyen szabad e jellel, a melylyel a hires Gauss a *számok congruentiáját* jelölte, egyszersmind a geometriai congruentiát is megjelölni; nem kell tartani attól, hogy ez kétértelműséget okozna.

[3] 1. §. (1. ábra). *Ha az* $a\overline{m}$ *egyenest a vele egy és ugyanabban a síkban fekvő* $b\overline{n}$ *egyenes nem metszi, ellenben bármely (abn-en belül fekvő)* $b\overline{p}$ *metszi: azt így jelöljük:*

$$bn \,|||\, am.$$

Hogy *egy és csupán csak is egy* ilyen, valamely tetszés szerinti (az $a\overline{m}$-en kívül fekvő) b pontból kiinduló $b\overline{n}$ *van* és hogy

$$bam + abn \leqq 2R,$$

az világos. Ha ugyanis bc-t addig mozgatjuk b körül, míg $bam + abc = 2R$-rel: akkor e közben $b\overline{c}$ abba a helyzetbe fog eljutni, a melyben legelőször nem metszi $a\overline{m}$-et és akkor lesz:

$$bc \,|||\, am.$$

Ugyancsak világos az is, hogy

$$bn \,|||\, em,$$

hogy ha e-t bárhol veszszük föl $a\overline{m}$-ben (csupán azt kötve ki, hogy $am > ae$ legyen).

Ha a c pont $a\overline{m}$-en a végtelenbe távozik úgy, hogy e mellett mindig

$$cd = cb :$$

akkor

$$cdb = (cbd < nbc);$$

ámde

$$nbc \rightsquigarrow 0$$

és ezért egyszersmind

$$adb \rightsquigarrow 0.$$

2. §. (2. ábra). *Ha*

$$bn \,|||\, am,$$

akkor egyszersmind

$$cn \,|||\, am.$$

Legyen ugyanis d bárhol $macn$-ben. Ha c $\overline{bn}$-ben van, akkor $\overline{bd}$ metszeni fogja $\overline{am}$-et (mert $bn \,|||\, am$) és ezért $\overline{cd}$ is metszi $\overline{am}$-et; ha ellenben c $\overline{bp}$-ben van, tegyük fel, hogy

$$bq \,|||\, cd.$$

De akkor $\overline{bq}$-nak (az 1. §. szerint) abn-be kell esnie és $\overline{am}$-et metszenie; ezért $\overline{cd}$ is metszi $\overline{am}$-et. Mindkét esetben bármely (acn-en belül fekvő) $\overline{cd}$ metszeni fogja $\overline{am}$-et a nélkül, hogy $\overline{cn}$ az $\overline{am}$-et metszené. Ezért tehát mindig lesz:

$$cn \,|||\, am.$$

3. §. (2. ábra). *Ha úgy* br *mint* $cs \,|||\, am$ *és* c *nincsen* $\overline{br}$-*ben, akkor* $\overline{br}$ *és* $\overline{cs}$ *nem metszik egymást.*

Ha ugyanis d a $\overline{br}$ és $\overline{cs}$ közös pontja volna, akkor (a 2. §. szerint)

$$dr \,|||\, am, \quad ds \,|||\, am$$

volna és így (az 1. §. szerint) $\overline{ds}$-nek $\overline{dr}$-re és c-nek (a feltevés ellenére) $\overline{br}$-be kellene esnie.

4. §. (3. ábra). *Ha*

$$man > mab,$$

akkor az $\overline{ab}$ *bármely* b *pontjának megfelelőleg van* $\overline{am}$-*ben egy oly* c *pont, a melyre nézve*

$$bcm = nam.$$

d ugyanis (az 1. §. szerint) oly módon választható, hogy

$$bdm > nam$$

legyen és ha akkor

$$mdp = man,$$

b-nek $nadp$-n belül kell esnie. Ha tehát nam-et am mentén eltoljuk mindaddig, míg $\overline{an}$ $\overline{dp}$-be eljut, közben $\overline{an}$-nek át kell mennie b-n és ebben a helyzetben lesz:

$$bcm = nam.$$

[4] 5. §. (1. ábra). *Ha*

$$bn \;|||\; am,$$

akkor $\overline{am}$*-ben van oly* f *pont, a melyre nézve*

$$fm \bumpeq bn.$$

Ugyanis (az 1. §. szerint) c úgy választható, hogy

$$bcm > cbn$$

legyen és ha ekkor

$$ce = cb:$$

lesz:

$$ec \bumpeq cb.$$

Ebből tehát világos, hogy

$$bem < ebn.$$

Tegyük föl, hogy p befutja ec-t és nevezzük e közben a bpm szöget folytonosan u-nak és a pbn szöget v-nek: akkor világos, hogy u eleinte kisebb, később pedig nagyobb lesz a hozzátartozó v-nél. Minthogy (a 4. §. szerint) nincsen a bem-nél nagyobb és a bcm-nél kisebb szög, a melylyel u a mozgás közben egyszer egyenlővé nem válnék, u-nak bem-től kezdve bcm-ig *folytonosan* növekednie és v-nek ebn-től kezdve cbn-ig hasonlóképen folytonosan fogynia kell. Így tehát ec-nek oly f pontot kell tartalmaznia, a melyre nézve

$$bfm = fbn.$$

6. §. *Ha*

$$bn \;|||\; am$$

és e $\overline{am}$*-nek,* g *pedig* $\overline{bn}$*-nek bármely pontja, akkor*

$$gn \;|||\; em \quad \text{és} \quad em \;|||\; gn.$$

Ugyanis (az 1. §. szerint)

$$bn \;|||\; em$$

és ebből (a 2. §. szerint) következik, hogy

$$gn \,|||\, em.$$

Ha továbbá

$$fm \bumpeq bn$$

(5. §.), akkor

$$mfbn \equiv nbfm$$

és ezért (minthogy $bn \,|||\, fm$) egyszersmind

$$fm \,|||\, bn$$

és (az előbbiek szerint)

$$em \,|||\, gn.$$

7. §. (4. ábra). *Ha úgy bn mint $cp \,|||\, am$ és c nincsen $\overline{bn}$-ben: akkor is lesz:*

$$bn \,|||\, cp.$$

Ugyanis $b\bar{n}$ és $c\bar{p}$ (a 3. §. szerint) nem metszik egymást; am, bn, cp pedig akár ugyanabban a síkban lehetnek, akár pedig nem és az első esetben még am lehet akár $bncp$-n belül, akár pedig azon kívül.

Hogy ha am, bn, cp egy és ugyanabban a síkban vannak és am $bncp$-n belül van, akkor minden egyes (az nbc-n belül fekvő) $b\bar{q}$ metszeni fogja $\overline{am}$-et egy-egy d pontban (mert $bn \,|||\, am$). Minthogy továbbá (a 6. §. szerint)

$$dm \,|||\, cp,$$

világos, hogy $d\bar{q}$ metszi majd $c\bar{p}$-t és ezért lesz:

$$bn \,|||\, cp.$$

Ha ellenben bn, cp am-nek ugyanazon oldalán vannak, akkor közülök az egyik, pl. cp a másik kettő, bn és am *közé* fog esni. Minden egyes (nba-n belül fekvő) $b\bar{q}$ tehát metszeni fogja $a\bar{m}$-et és így $c\bar{p}$-t is. Így tehát

$$bn \,|||\, cp.$$

Ha mab és mac szöget alkotnak, akkor cbn-nek abn-nel $\overline{bn}$-en kívül, (az abn-ben fekvő) $\overline{am}$-nek pedig $\overline{bn}$-nel és így

nbc-nek $a\overline{m}$-mel sem, közös pontja nem lehet. Bármely (nba-n belül fekvő) $b\overline{d}$-n átfektetett $bc\overline{d}$ azonban metszeni fogja $a\overline{m}$-et, mert ($bn\ |||\ am$ lévén) $b\overline{d}$ metszi $a\overline{m}$-et. Ha tehát $bc\overline{d}$-t addig mozgatjuk [5] bc körül, míg *először* oly helyzetbe el nem jut, a melyben $a\overline{m}$-et nem metszi, akkor végül egybe kell esnie $bc\overline{n}$-nel. Hasonlóképen belátható, hogy ugyanakkor $bc\overline{p}$-vel is egybe kell esnie és így tehát bn-nek benne kell feküdnie bcp-ben. Ha továbbá

$$br\ |||\ cp,$$

akkor (minthogy egyszersmind $am\ |||\ cp$) az előbbihez hasonló okból br-nek bam-be és (mert $br\ |||\ cp$), bcp-be is belé kell esnie. Így tehát $\overline{br}$ nem egyéb mint az mab és pcb közös vonala $\overline{bn}$ és ezért

$$bn\ |||\ cp.$$

Ha tehát

$$cp\ |||\ am$$

és b $\overline{cam}$*-en kívül van, akkor* bam *és* bcp *metszés-vonala, t. i.* $b\overline{n}$ $|||$ *úgy* am*-mel, mint* cp*-vel.**

8. §. (5. ábra). *Ha*

$$bn\ |||\quad \text{és}\quad \stackrel{\frown}{=} cp$$

(vagy rövidebben $bn\ |||\ \stackrel{\frown}{=} cp$*) és (az* $nbcp$*-n belül fekvő)* am *a* bc *egyenest* $\llcorner$*-en felezi, akkor lesz:*

$$bn\ |||\ am.$$

Ha ugyanis $b\overline{n}$ $a\overline{m}$-et metszené, akkor (minthogy $mabn \equiv$ $\equiv macp$) $c\overline{p}$-nek is $a\overline{m}$-et ugyanabban a pontban kellene metszenie, és ez így közös pontja volna $b\overline{n}$-nek és $c\overline{p}$-nek, noha

$$bn\ |||\ cp.$$

---

* A harmadik esetet *előrebocsátva,* az előbbi kettőt a 10. §. 2-dik esetének mintájára rövidebben és elegánsabban lehet tárgyalni.

Bolyai János megjegyzése az errata-k közt.

Bármely (cbn-en belül fekvő) $b\bar{q}$ azonban metszeni fogja $c\bar{p}$-t és ezért $b\bar{q}$-nak $a\bar{m}$-et is kell metszenie. Ebből következik, hogy

$$bn \mathbin{|||} am.$$

9. §. (6. ábra). *Ha*

$$bn \mathbin{|||} am, \quad ma\bar{p} \mathrel{\llcorner} ma\bar{b}$$

és az a szög, a melyet $nb\bar{d}$ $nb\bar{a}$-val alkot ($mabn$-nek ugyanazon oldalán, a melyen $ma\bar{p}$ van), kisebb R-nél, akkor $ma\bar{p}$ és $nb\bar{d}$ metszik egymást.

Legyen ugyanis

$$bam = R,$$

továbbá

$$ac \mathrel{\llcorner} bn,$$

(hol c vagy összeesik b-vel, vagy pedig nem) és (az $nb\bar{d}$-ben fekvő)

$$ce \mathrel{\llcorner} bn,$$

akkor (a feltevés szerint) lesz:

$$ace < R$$

és $af (\mathrel{\llcorner} ce)$ belül esik majd ace-n. Legyen (a közös a pontot tartalmazó) abf és $am\bar{p}$ metszése $\bar{ap}$, akkor (minthogy $bam \mathrel{\llcorner} map$) lesz:

$$bap = bam = R.$$

Ha végre (az a és b pontokat szilárdan megtartva) abf-et $ab\bar{m}$-re helyezzük, akkor $a\bar{p}$ össze fog esni $a\bar{m}$-mel és minthogy

$$ac \mathrel{\llcorner} bn$$

és

$$af < ac,$$

világos, hogy af ebben a helyzetben nem fog $b\bar{n}$-ig érni, a miért bf-nek abn-en belül kell esnie. E helyzetben tehát (minthogy $bn \mathbin{|||} am$) bf metszeni fogja $a\bar{p}$-t és ezért bf-nek és $a\bar{p}$-nek *eredeti* helyzetükben is metszeniök kell egymást. Metszéspontjuk azonban [6] $ma\bar{p}$-nek és $nb\bar{d}$-nek is közös pontja és így $ma\bar{p}$-nek és $nb\bar{d}$-nek is metszeniök kell egymást.

Könnyen következtethető ebből, hogy *$\overline{map}$ és $\overline{nbd}$ egymást metszik, hogy ha a belső szögek összege, a melyeket mabn-nel alkotnak, kisebb 2R-nél.*

10. §. (7. ábra). *Ha úgy bn mint $cp \, ||| \bumpeq am$, akkor egyszersmind*

$$bn \, ||| \bumpeq cp.$$

mab és mac ugyanis vagy szöget alkotnak, vagy pedig ugyanahhoz a síkhoz tartoznak.

Ha az első esetben $\overline{qdf}$ merőlegesen felezi az ab egyenest, akkor

$$dq \llcorner ab$$

és ezért (a 8. §. szerint)

$$dq \, ||| \, am.$$

Ha hasonlóképen $\overline{ers}$ merőlegesen felezi ac-t, akkor

$$er \, ||| \, am$$

és ebből (a 7. §. szerint) következik, hogy

$$dq \, ||| \, er.$$

Ezekből (a 9. §. alapján) egyszerű módon következik, hogy $\overline{qdf}$ és $\overline{ers}$ egymást metszik. $\overline{fs}$ metszés-vonaluk (a 7. §. szerint) $|||\, dq$ és (minthogy $bn \, ||| \, dq$) egyszersmind

$$fs \, ||| \, bn.$$

Ha továbbá f $\overline{fs}$-nek bármely pontja, akkor

$$fb = fa = fc$$

és ezért $\overline{fs}$-nek a bc egyenest merőlegesen felező $\overline{tgf}$ síkba kell esnie. Így tehát (minthogy $fs \, ||| \, bn$, a 7. §. szerint) lesz:

$$gt \, ||| \, bn.$$

Hasonló módon bizonyítható be, hogy

$$gt \, ||| \, cp.$$

De mivel gt merőlegesen felezi bc-t és ezért

$$tgbn \equiv tgcp$$

és ebből (a 8. §. szerint) következik, hogy

$$bn \;|||\; \bumpeq cp.$$

Ha bn, am és cp ugyanabban a síkban vannak, tegyük fel, hogy valamely (e síkon kívül levő) $fs \;|||\; \bumpeq am$: akkor az előbbiek szerint lesz:

$$fs \;|||\; \bumpeq bn, \quad fs \;|||\; \bumpeq cp$$

és ebből következik, hogy

$$bn \;|||\; \bumpeq cp.$$

11. §. *F-nek nevezzük ama pontok összességét, a mely az a pontból és mindama pontokból áll, a melyek közül bármelyik b pont olyan, hogy, a midőn $bn \;|||\; am$, akkor egyszersmind $bn \;|||\; \bumpeq am$; az F metszését pedig valamely, az am egyenest tartalmazó síkkal L-nek nevezzük.*

Bármely egyenesen belül, a mely $|||$ am-mel, F-nek egy és csakis egy pontja van. Világos, hogy am az L-et két congruens részre osztja fel. $a\tilde{m}$-et az L tengelyének nevezzük. Világos továbbá az is, hogy minden az am egyenest magában foglaló sík egy és csak egy olyan L-et tartalmaz, a melynek tengelye $a\tilde{m}$. Minden egyes ilyen L-et $a\tilde{m}$-hez tartozó L-nek nevezzük (ezt úgy értve, hogy az épen szóban levő síkban fekszik).

Világos, hogy L bizonyos F-et ír le, hogy ha azt am körül forgatjuk; erre nézve $a\tilde{m}$-et szintén tengelynek nevezzük és viszont azt mondjuk, hogy ez az F $a\tilde{m}$-hez tartozik.

[7] 12. §. *Ha b az $a\tilde{m}$-hez tartozó L-ben bárhol van és*

$$bn \;|||\; \bumpeq am \text{ (11. §.)},$$

akkor az $a\tilde{m}$-hez tartozó L és a $b\tilde{n}$-hez tartozó L összeesnek.

Nevezzük ugyanis a megkülönböztetés végett a $b\tilde{n}$-hez tartozó L-et l-nek; legyen c valahol l-ben és

$$cp \;|||\; \bumpeq bn \text{ (11. §.)}:$$

akkor (minthogy egyszersmind $bn \;|||\; \bumpeq am$, a 10. §. szerint) lesz:

$$cp \,|||\, \bumpeq am$$

és ezért c egyszersmind L-be is esik. Ha pedig c valahol L-ben van és

$$cp \,|||\, \bumpeq am,$$

akkor (a 10. §. szerint)

$$cp \,|||\, \bumpeq bn$$

és ezért (a 11. §. szerint) c l-be is esik. Így tehát L és l azonosak; továbbá bármely $b\tilde{n}$ tengelye egyszersmind L-nek is és L összes tengelyei egymással a $\bumpeq$ kapcsolatban állanak.

Ugyanez hasonló módon F-ről kimutatható.

13. §. (8. ábra). *Ha*

$$bn \,|||\, am, \quad cp \,|||\, dq$$

és

$$bam + abn = 2R;$$

akkor egyszersmind

$$dcp + cdq = 2R.$$

Legyen ugyanis

$$ea = eb, \quad efm = dcp \text{ (4. §.)}$$

akkor, minthogy

$$bam + abn = 2R = abn + abg,$$

lesz:

$$ebg = eaf.$$

Így tehát, hogy ha még

$$bg = af,$$

akkor

$$\Delta ebg \equiv \Delta eaf, \quad beg = aef$$

és ezért g-nek $f\tilde{e}$-be kell esnie. Továbbá még

$$gfm + fgn = 2R$$

(mert $egb = efa$) és (a 6. §. szerint)

$$gn \,|||\, fm.$$

Ha tehát

$$mfrs \equiv pcdq,$$

akkor (a 7. §. szerint)

$$rs \parallel\!| gn$$

és (hogy ha csak cd nem egyenlő fg-vel, a mikor a dolog amúgy is világos) r vagy fg-n belül, vagy pedig azon kívül fog esni.

I. Az első esetben frs nem nagyobb, mint

$$2R-rfm=fgn,$$

mert

$$rs \parallel\!| fm.$$

Minthogy továbbá

$$rs \parallel\!| gn$$

frs egyszersmind kisebb sem lehet fgn-nél; ezért

$$frs=fgn$$

és

$$rfm+frs=gfm+fgn=2R.$$

Tehát valóban

$$dcp+cdq=2R.$$

II. Ha r fg-n kívül esik, akkor

$$ngr=mfr.$$

Legyen már mostan

$$mfgn\equiv nghl\equiv lhko$$

és így tovább mindaddig, a míg nem fk fr-rel vagy egyenlővé válik, vagy ezt legelőször túl nem haladja, akkor (a 7. §. szerint) lesz:

$$ko \parallel\!| hl \parallel\!| fm.$$

Ha k összeesik r-rel, akkor (az 1. §. szerint) ko-nak is rs-re kell esnie és ezért lesz:

$$rfm+frs=kfm+fko=kfm+fgn=2R;$$

ha ellenben r hk-n belül esik, akkor (I. szerint) lesz:

$$rhl+krs=2R=rfm+frs=dcp+cdq.$$

14. §. *Ha*

$$bn \parallel\!| am, \quad cp \parallel\!| dq$$

és

$$bam+abn<2R,$$

akkor egyszersmind

$$dcp+cdq<2R.$$

Ha ugyanis $dcp+cdq$ nem volna kisebb $2R$-nél, akkor (az 1. §. szerint) egyenlőnek kellene lennie $2R$-rel. Ámde akkor (a 13. szerint) $bam+abn$ szintén $2R$-rel volna egyenlő, (a mi a feltevéssel ellenkezik).

15. §. *Tekintettel a 13. és 14. §§. eredményeire nevezzük a geometriának azt a rendszerét, a melyben Euklides XI. axiomájának igaz voltát feltételezik, Σ-nak; az ellenkező feltevésen felépülő* [8] *rendszert pedig S-nek.*

Mindamaz eredmények, a melyekről nem emeljük ki különösen, vajjon Σ-ban vagy S-ben érvényesek-e, feltétlenül érvényeseknek, azaz egyaránt érvényeseknek tekintendők, akár Σ, akár pedig S feleljen meg a valóságnak.

16. §. (5. ábra). *Ha $a\overline{m}$ valamely L-nek tengelye: akkor a Σ rendszerben ez az L az $a\overline{m}$-re ∟ egyenes.*

Legyen ugyanis $b\overline{n}$ L-nek ama tengelye, a mely annak valamely b pontjából kiindul: akkor Σ-ban lesz:

$$bam+abn=2bam=2R$$

és ezért

$$bam=R.$$

Hogy ha viszont c $\overline{ab}$-nek valamely tetszés szerinti pontja és

$$cp \parallel\!| \, am;$$

akkor (a 13. §. szerint) lesz:

$$cp \triangleq am$$

és ezért c L-ben van.

Az S rendszerben ellenben sem L-ben, sem pedig F-ben nincsen olyan három a, b, c pont, a melyek ugyanabban az egyenesben feküsznek.

Ugyanis az $a\overline{m}$, $b\overline{n}$, $c\overline{p}$ tengelyek közül az egyiknek (p. o. $a\overline{m}$-nek) a másik kettő közé kell esnie és akkor (a 14. §. szerint) úgy bam, mint cam, kisebb lesz R-nél.

17. §. *L S-ben is vonal, F pedig felület.*

Ugyanis (a 11. §. szerint) bármely sík, (a mely F valamely pontján átmegy és) a mely az $a\widetilde{m}$ tengelyre $\perp$-en áll, F-et oly kör kerületében metszi, a melynek síkja (a 14. §. szerint) egyetlen-egy más $b\tilde{n}$ tengelyre sem lehet merőleges. Hogy ha pedig F-et bn körül forgatjuk, akkor (a 12. §. szerint) e közben F-nek minden pontja magán F-en fog maradni és a $b\tilde{n}$-re nem merőleges síkkal való metszése felületet fog leírni.

Minthogy (a 12. §. szerint) F oly módon fedheti el *önönmagát*, hogy *a b*-re essék, — bármely pontjai is *a* és *b* — *F oly felület, a melynek görbülete minden pontjában egyenletes* (uniformis). Ebből azután (a 11. és 12. §§. szerint) következik, hogy *L oly vonal, a melynek görbülete minden pontjában egyenletes* (uniformis).*

18. §. (7. ábra). *S-ben bármely síknak metszése F-fel, a mely F valamely a pontján átmegy és az $a\widetilde{m}$ tengelyre ferdén áll, körnek kerülete.*

Legyen ugyanis a, b, c e metszés 3 pontja és legyenek továbbá $b\tilde{n}$, $c\tilde{p}$ tengelyek: akkor $ambn$ és $amcp$ szöget fognak alkotni, mert különben (a 16. §. szerint) az a, b, c pontok meghatározta sík (a feltevés ellenére) am-et is tartalmazná. Azok a síkok tehát, a melyek az ab és ac egyeneseket merőlegesen felezik, (a 10. §. szerint) egymást F-nek valamely $f\tilde{s}$ tengelyében fogják metszeni és így

$$fb = fa = fc.$$

Legyen továbbá

$$ah \perp fs$$

és forgassuk fah-t fs körül, akkor a egy a b-t és c-t tartalmazó, úgy F-ben mint $\overline{abc}$-ben fekvő ha sugarú kör kerületét fogja leírni [9] és (a 16. §. szerint) F-nek és $\overline{abc}$-nek $\bigcirc ha$-n kívűl nem lesz egyetlen közös pontja sem. Világos egyszersmind az is, hogy

---

* E bebizonyítást nem szükséges csupán csak S-re szorítani. Könnyen rendezhető be oly módon, hogy feltétlenül (azaz úgy S-ben mint Σ-ban) érvényes legyen.

Szerző megjegyzése az errata-k közt.

ugyanazt a $\bigcirc ha$-t fogja leírni az L vonal fa darabjának végpontja, hogy ha azt (mint radiust) F-ben f körül mozgatjuk.

19. §. (5. ábra). *S-ben az L-nek $b\bar{n}$ tengelyére merőleges (és L síkjában fekvő) bt, L-nek érintője.*

L-nek ugyanis (a 14. §. szerint) $b\bar{t}$-ben b-n kívül más pontja nincsen. Ha azonban bq tbn-en belül fekszik, akkor $b\bar{q}$ nyilván tartalmazni fogja a bq-n átmenő és tbn-re merőleges sík és a $b\bar{n}$-hez tartozó F metszésének középpontját (18. §.) és ha bq e metszés átmérője, világos, hogy $b\bar{q}$ a $b\bar{n}$-hez tartozó L-et q-ban metszi.

20. §. *F két tetszés szerinti pontja* (a 11. és 18. §§. szerint) *egy L vonalat határoz meg.* Minthogy (a 16. és 19. §§. szerint) L merőleges minden tengelyére, *F-ben bármely L vonalak alkotta szög egyenlő azzal a szöggel, a melyet a szárain átfektetett F-re merőeges síkok alkotnak.*

21. §. (6. ábra). *Két ugyanabban az F-ben fekvő L-alakú vonal, $a\bar{p}$ és $b\bar{d}$ metszi egymást, ha valamely harmadik L-alakú $\bar{a}\bar{b}$ vonallal oly belső szögeket alkotnak, a melyeknek összege kisebb 2R-nél.* (F-ben $\bar{a}\bar{p}$ alatt értendő az a-n és p-n átfektetett L, $a\bar{p}$ alatt ellenben annak a által határolt ama fele, a mely p-t tartalmazza).

Ha ugyanis $a\bar{m}$, $b\bar{n}$ az F tengelyei, akkor (a 9. §. szerint) $am\bar{p}$, $bn\bar{d}$ egymást metszeni fogják és (a 7. és 11. §§. szerint) F metszeni fogja amazoknak metszését. Tehát $a\bar{p}$ és $b\bar{d}$ szintén metszik egymást.

Ezekből világos, hogy *a XI. axioma, valamint az összes a geometriában és a sík trigonometriájában belőle levonható következtetések feltétlenül érvényesek F-ben is, hogy ha az egyenesek szerepét az L vonalakra ruházzuk át. Ezért a trigonometricus függvényeket itt ugyanabban az értelemben használhatjuk, a mint az Σ-ban szokásos. Épen úgy annak a körnek kerülete, a melynek radiusa F-ben valamely L vonalon megmérve r-rel egyenlő, 2πr lesz, valamint*

$$\odot r\ (F\text{-ben}) = \pi r^2$$

(hol π alatt $\frac{1}{2}\bigcirc 1$ értendő, vagyis az ismeretes érték: 3·1415926...).

22. §. (9. ábra). *Ha* $\overline{ab}$ *az* $\overline{am}$*-hez tartozó L, c pedig* $\overline{am}$*-ben van és az (*$\overline{am}$ *egyenes és* $\overline{ab}$ *L-alakú vonal* [10] *alkotta) cab szöget előbb* $\overline{ab}$ *mentén, azután pedig* $\overline{ba}$ *mentén egészen a végtelenig eltoljuk: akkor a c pont leírta* $\overline{cd}$ *út lesz a* $\overline{cm}$*-hez tartozó L.*

Ugyanis az utóbbit l-lel jelölve, legyen d $\overline{cd}$-nek valamely tetszés szerinti pontja, továbbá

$$dn \,|||\, cm$$

és b az L és $\overline{dn}$ közös pontja: akkor

$$bn \bumpeq am \quad \text{és} \quad ac = bd,$$

a miből következik, hogy

$$dn \bumpeq cm.$$

Így tehát világos, hogy d pontja l-nek. Ha viszont d l-ben van, továbbá

$$dn \,|||\, cm$$

és b az L és $\overline{dn}$ közös pontja : akkor

$$am \bumpeq bn \quad \text{és} \quad cm \bumpeq dn,$$

a miből világos, hogy

$$bd = ac,$$

vagyis, hogy d a c pont útjába esik. l és $\overline{cd}$ tehát azonosak. Ily l-ről azt írjuk, hogy

$$l \parallel L.$$

23. §. (9. ábra). Ha cdf és abe L-alakú vonalak és (a 22. §. értelmében)

$$cdf \parallel abe,$$

továbbá

$$ab = be$$

és $\overline{am}$, $\overline{bn}$, $\overline{ep}$ tengelyek, akkor világos, hogy

$$cd = df.$$

Ha pedig a, b, e $\overline{ab}$-nek 3 tetszés szerinti pontja és

$$ab = n \,.\, cd,$$

akkor egyszersmind

$$ae=n\,.\,cf$$

úgy, hogy (nyilván még akkor is, hogy ha ab, ae, dc incommensurabilisek) fennáll a következő relatió :

$$ab:cd=ae:cf.$$

$ab:cd$ tehát ab-től független és ac által teljesen meghatározott érték. Ha ac-t valamely kis betűvel (p. o. x-szel) jelöljük, akkor ezt az $ab:cd$ viszonyt a megfelelő nagy betűvel (X-szel) fogjuk jelölni.

24. §. (9. ábra). *Bármely értékeket is jelentsenek x és y,*

$$Y=X^{\frac{x}{y}} \text{ (23. §.).}$$

Az x és y értékek közül ugyanis az egyik (p. o. y) vagy többszöröse a másiknak (x-nek), vagy pedig nem az.

Ha

$$y=nx,$$

akkor legyen

$$x=ac=cg=gh$$

és így tovább mindaddig, a míg nem

$$ah=y.$$

Legyen továbbá

$$cd \parallel gk \parallel hl:$$

akkor (a 23. §. szerint)

$$X=ab:cd=cd:gk=gk:hl$$

és ebből következik, hogy

$$\frac{ab}{hl}=\left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

azaz, hogy

$$Y=X^n=X^{\frac{y}{x}}.$$

Ha úgy x mint y ugyanannak az i-nek többszörösei, t. i.

$$x=mi \quad \text{és} \quad y=ni,$$

akkor (az előbbi szerint) lesz:

$$X=I^m, \quad Y=I^n$$

és ebből következik, hogy

$$Y=X^{\frac{n}{m}}=X^{\frac{y}{x}}.$$

Ugyanez az eredmény könnyen kiterjeszthető még arra az esetre is, midőn x és y incommensurabilisek.

Ha

$$q=y-x,$$

akkor világos, hogy

$$Q=\frac{Y}{X}\cdot$$

Világos az is, hogy *Σ-ben bármely x-nek megfelelőleg*

$$[11] \quad X=1;$$

S-ben ellenben mindig

$$X>1,$$

és bármely ab és abe-nek megfelelőleg cdf oly módon választható, hogy

$$cdf \parallel abe \quad \text{és} \quad cdf=ab$$

legyen, a miből következik, hogy

$$ambn \equiv amep,$$

annak ellenére, hogy az utóbbi az előbbinek valamely többszöröse. Ez az eredmény különös ugyan, de az S rendszer lehetetlenségének mégsem kétségtelen bizonyítéka.

25. §. (10. ábra). *Minden egyenes vonalú háromszögben ama körök kerületei, a melyeknek sugarai egyenlők a háromszög oldalaival, úgy viszonylanak egymáshoz, mint a szemben fekvő szögek sinusai.*

Legyen ugyanis

$$abc=R, \quad am \perp bac$$

és

$$bn \parallel\!\mid am, \quad cp \parallel\!\mid am;$$

akkor

$$cab \perp ambn$$

és (minthogy $cb \llcorner ba$) egyszersmind

$$cb \llcorner ambn,$$

a miből következik, hogy

$$cpbn \llcorner ambn.$$

Messe továbbá a $\overline{cp}$-hez tartozó F a $\overline{bn}$, $\overline{am}$ egyeneseket d-ben (ill.) e-ben és a $cpbn$, $cpam$, $bnam$ sávokat az L-alakú cd, ce, de vonalokban: akkor (a 20. §. szerint) a cde szög egyenlő az ndc és nde alkotta szöggel, azaz R-rel és hasonló okból

$$ced = cab.$$

Az L-vonalok alkotta ced háromszögben azonban (hogy ha a radius 1-gyel egyenlő, a 21. §. szerint)

$$ec : dc = 1 : \sin dec = 1 : \sin cab.$$

Ezen kívül (a 21. §. szerint) még

$$ec : dc = \bigcirc ec : \bigcirc dc \ (F\text{-ben}) = \bigcirc ac : \bigcirc bc \ (18.\ §.)$$

és így nyerjük, hogy

$$\bigcirc ac : \bigcirc bc = 1 : \sin cab.$$

Ebből az állítás helyessége bármely háromszögre vonatkozólag következik.

26. §. (11. ábra). *Bármely gömbháromszögben az oldalok sinusai úgy viszonylanak egymáshoz mint a szemben fekvő szögek sinusai.*

Legyen ugyanis

$$abc = R$$

és ced merőleges a gömb oa sugarára; akkor

$$ced \llcorner aob$$

és (minthogy boc is merőleges boa-ra) még

$$cd \llcorner ob.$$

A ceo és cdo háromszögekben azonban (a 25. §. szerint)

$$\bigcirc ec : \bigcirc oc : \bigcirc dc = \sin coe : 1 : \sin cod = \sin ac : 1 : \sin bc$$

és (ugyancsak a 25. §. szerint)

$$\bigcirc ec : \bigcirc dc = \sin cde : \sin ced.$$

Igy tehát

$$\sin ac : \sin bc = \sin cde : \sin ced.$$

Ámde

$$cde = R = cba \quad \text{és} \quad ced = cab,$$

a miből következik, hogy:

$$\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a.$$

A gömbnek ebből leszármaztatható trigonometriája így a XI. axiomától független alapot nyert.

27. §. (12. ábra). *Ha ac és bd merőlegesek ab-re és cab-t $\overline{ab}$ mentén eltoljuk, akkor (a c pont útját cd-nek nevezvén)*

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Legyen ugyanis

$$de \perp ca,$$

akkor (a 25. §. szerint) az *ade* és *adb* háromszögekre nézve

$$\bigcirc ed : \bigcirc ad : \bigcirc ab = \sin u : 1 : \sin v.$$

Ha *bacd*-t *ac* körül forgatjuk, akkor *b* leírja $\bigcirc ab$-t, *d* $\bigcirc cd$-t, az utat pedig, a melyet az említett *cd* le fog írni, nevezzük egyelőre $\odot cd$-nek. [12] Legyen továbbá *bfg* . . . valamely a $\odot ab$-be beleírt sokszögű idom, akkor az összes *bf, fg*, . . . oldalokon átmenő és $\odot ab$-re merőleges síkok $\odot cd$-ben szintén sokszögű idomot fognak meghatározni, a melyben az oldalok száma ugyanaz, mint az előbbiben. A 23. §. mintájára bebizonyítható, hogy

$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \ldots$$

és ezért

$$dh + hk + \ldots : bf + fg + \ldots = cd : ab.$$

Ha a *bf, fg*, . . . oldalok mind a 0 határértékhez közelednek, akkor világos, hogy

$$bf + fg + \ldots \rightharpoonup \bigcirc ab$$

és

$$dh+hk+\ldots \rightharpoondown \bigcirc ed.$$

Így tehát lesz:

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = cd : ab.$$

Ámde előbb találtuk, hogy

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = \sin u : \sin v,$$

a miből következik, hogy

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Ha ac-t bd-től végtelen távolságra toljuk el, $cd:ab$ és evvel együtt $\sin u : \sin v$ mégis állandóan ugyanaz az érték marad, míg (az 1. §. szerint)

$$u \rightharpoondown R$$

és ha $dm \,|||\, bn$ lesz:

$$v \rightharpoondown z.$$

Ebből következik, hogy

$$cd : ab = 1 : \sin z.$$

Az említett cd útról azt írjuk, hogy

$$cd \parallel ab.$$

28. §. (13. ábra). *Ha*

$$bn \,|||\, \hat{=} am,$$

továbbá c $a\tilde{m}$-ben van és

$$ac = x:$$

akkor

$$X\,(23.\ §.) = \sin u : \sin v.$$

Ha ugyanis

$$cd \llcorner bn, \quad ae \llcorner bn \quad \text{és} \quad bf \llcorner am,$$

akkor (úgy mint a 27. §-ban) lesz:

$$\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v.$$

Ámde közvetetlenül belátható, hogy

$$bf = ae$$

és ezért lesz:

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin u : \sin v.$$

Az $\overline{am}$-hez és $\overline{cm}$-hez tartozó F-alakú felületekben azonban (a melyek $ambn$-et ab-ben és cg-ben metszik, a 21. §. szerint)

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = ab : cg = X.$$

Így tehát nyerjük, hogy

$$X = \sin u : \sin v.$$

29. §. (14. ábra). *Ha*

$$bam = R, \quad ab = y \quad \text{és} \quad bn \, ||| \, am,$$

akkor S-ben

$$Y = \cot \tfrac{1}{2} u.$$

Ha ugyanis

$$ab = ac \quad \text{és} \quad cp \, ||| \, am,$$

úgy, hogy

$$bn \, ||| \simeq cp$$

és azonfelül még

$$pcd = qcd:$$

akkor (a 19. szerint) a $\overline{cd}$-re merőleges ds oly módon határozható meg, hogy

$$ds \, ||| \, cp,$$

legyen, a miből (az 1. §. szerint) következik, hogy egyszersmind

$$dt \, ||| \, cq.$$

Legyen továbbá

$$be \perp \overline{ds};$$

akkor (a 7. §. szerint)

$$ds \, ||| \, bn$$

és ezért továbbá (a 6. §. szerint)

$$bn \, ||| \, es$$

és (minthogy $dt \, ||| \, cg$) egyszersmind lesz :

$$bq \, ||| \, et.$$

Ebből (az 1. §. szerint) következik, hogy

$$ebn = ebq.$$

Képviselje már most bcf a $\overline{bn}$-hez tartozó L-nek bizonyos ívét és fg, dh, ck és el az $f\bar{t}$-, illetőleg $d\bar{t}$-, $c\bar{q}$- és $e\bar{t}$-hez tartozó L vonal egy-egy ívét: akkor (a 22. §. szerint) világos, hogy

$$hg=df=dk=hc,$$

úgy, hogy

$$cg=2ch=2v.$$

Hasonlóképen világos, hogy

$$bg=2bl=2z.$$

Ámde

$$bc=bg-cg;$$

ezért

$$y=z-v,$$

a miből (a 24. §. szerint) következik, hogy

$$Y=Z:V.$$

Végre még (a 28. §. szerint)

$$Z=1:\sin\tfrac{1}{2}u, \quad V=1:\sin(R-\tfrac{1}{2}u),$$

a miből következik, hogy

$$Y=\cot\tfrac{1}{2}u.$$

[13] 30. §. (15. ábra). A 25. §. alapján könnyen belátható, hogy *a sík-trigonometria problémájának megoldására szükségünk lesz arra, hogy a kör kerületét a sugárral tudjuk kifejezni; ez pedig az L rectificatiója alapján lehetséges.*

Legyenek ab, cm, $c'm'$ $\perp$-ek $\overline{ac}$-re és b legyen $a\bar{b}$-nek valamely pontja: akkor (a 25. §. szerint) lesz:

$$\sin u:\sin v=\bigcirc p:\bigcirc y$$

és

$$\sin u':\sin v'=\bigcirc p:\bigcirc y',$$

a miből következik, hogy

$$\frac{\sin u}{\sin v}\bigcirc y=\frac{\sin u'}{\sin v'}\bigcirc y'.$$

Ámde (a 27. §. szerint)

$$\sin v:\sin v'=\cos u:\cos u'$$

és így

$$\frac{\sin u}{\cos u} \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \bigcirc y',$$

vagyis

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \operatorname{tg} u' : \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} w : \operatorname{tg} w'.$$

Legyen továbbá

$$cn \parallel\!| \, ab, \quad c'n' \parallel\!| \, ab$$

és cd, $c'd'$ legyenek $\overline{ab}$-re merőlegesen álló L-alakú vonalok: akkor (a 21. §. szerint)

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r',$$

a miből következik, hogy

$$r : r' = \operatorname{tg} w : \operatorname{tg} w'.$$

Növekedjék már most p a-tól kezdve minden határon túl: akkor

$$w \to z, \quad w' \to z'$$

és így

$$r : r' = \operatorname{tg} z : \operatorname{tg} z'.$$

Ha tehát az *állandó* (r-*től független*) $r : \operatorname{tg} z$ értéket i-vel jelöljük; akkor midőn

$$y \to 0,$$

egyszersmind

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i \operatorname{tg} z}{y}\right) \to 1$$

és ezért

$$\frac{y}{\operatorname{tg} z} \to i.$$

Ámde a 29. §.-ból következik, hogy

$$\operatorname{tg} z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1})$$

és így

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \to i,$$

vagyis (a 24. §. szerint)

$$\frac{2y I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \to i.$$

Ismeretes azonban, hogy e kifejezés határértéke (midőn $y \to 0$) nem más mint

$$\frac{i}{\log.\text{nat}.\,I};$$

így tehát

$$\frac{i}{\log.\text{nat}.\,I} = i$$

és

$$I = e = 2{\cdot}7182818\ldots,$$

mely számnak kiváló jelentősége ebben is mutatkozik. Hogy ha t. i. a következőkben *i-vel azt az egyenest jelöljük, a melynek megfelelőleg*

$$I = e,$$

akkor

$$r = i\,\mathrm{tg}\,z.$$

Ámde (a 21. §. szerint) volt:

$$\bigcirc y = 2\pi r$$

és így lesz:

$$\bigcirc y = 2\pi i\,\mathrm{tg}\,z = \pi i\,(Y - Y^{-1}) = \pi i\,(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}) =$$

$$= \frac{\pi y}{\log.\text{nat}.\,Y}\,(Y - Y^{-1}) \quad \text{(a 24. §. szerint).}$$

31. §. (16. ábra). *S-ben minden egyenesvonalú derékszögű háromszög trigonometriai megoldásához (a melylyel egyszersmind már minden egyenes vonalú háromszög megoldása is elintézettnek tekinthető)* [13] *3 egyenlet elégséges. T. i. (a-val és b-vel jelölvén a befogókat, c-vel az átfogót és α-val és β-val az a-val, illetőleg b-vel szemben fekvő szögeket):*

1. *egy egyenlet, mely vonatkozást fejez ki a, c és α között,*
2. *egy egyenlet, mely vonatkozást fejez ki a, α és β között,*
3. *egy egyenlet, mely vonatkozást fejez ki a, b és c között.*

A többi hármat kétségkívül ezekből kiküszöbölés útján nyerhetjük.

I. A 25. és 30. §§-ból következik, hogy

$$1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}).$$

(Ez az a, c és α között fennálló egyenlet).

II. Ha

$$\beta m \parallel\!| \gamma n,$$

akkor a 27. §-ból következik, hogy

$$\cos \alpha : \sin \beta = 1 : \sin u,$$

a 29. §-ból pedig, hogy

$$1 : \sin u = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1});$$

így tehát

$$\cos \alpha : \sin \beta = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}).$$

(Ez az α, β és a között fennálló egyenlet).

III. Ha $\alpha\alpha'$ merőleges $\beta\alpha\gamma$-ra, továbbá

$$\beta\beta' \parallel \alpha\alpha', \quad \gamma\gamma' \parallel \alpha\alpha' \quad (27.\ §.)$$

és $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$, akkor világos, hogy (épúgy mint a 27. §-ban)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1});$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1});$$

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(C + C^{-1}).$$

Ezekből következik, hogy

$$\tfrac{1}{2}(C + C^{-1}) = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1})\tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

vagyis, hogy

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}).$$

(Ez az a, b és c között fennálló egyenlet).

Ha

$$\gamma\alpha\delta = R$$

és

$$\beta\delta \perp \alpha\delta,$$

akkor

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin \alpha$$

és

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\delta) = 1 : \cos \alpha.$$

leteit (az előbbiek alapján) vezetjük le, akkor az e vonalok határolta területek is kiszámíthatók.

Ha t a p síkdarabbal $\|$ (és ettől q távolságnyira levő) felületdarabot jelenti, akkor világos, hogy t viszonya p-hez egyenlő a homolog vonaldarabok 2-dik hatványainak viszonyával, vagyis, hogy

$$t:p=\tfrac{1}{4}(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}})^2:1.$$

Világos továbbá az is, hogy a térfogatnak hasonló eljárással való kiszámítása két integrálás végrehajtását igényli (mert itt már magát a differentiált is integrálás segítségével kell meghatároznunk).

Legyen mindenek előtt [17] meghatározandó az a térfogat, a melyet p és t, valamint a p és t határait összekötő és p-re merőleges egyenesek összessége határol: akkor (akár integratió segítségével, akár a nélkül) azt találjuk, hogy e térfogat a következő kifejezéssel egyenlő:

$$\tfrac{1}{8}pi(e^{\frac{2q}{i}}-e^{-\frac{2q}{i}})+\tfrac{1}{2}pq.$$

Meghatározhatjuk még S-ben testek felületét, valamint tetszés szerinti vonalok *görbületét, evolutáit, evolvenseit stb.-it.*

A mi S-ben a görbületet illeti, az vagy az L-ével megegyező, vagy valamely kör sugarával, vagy pedig valamely egyenessel $\|$ görbének amaz egyenestől való távolságával jellemezhető. Az előbbiek alapján ugyanis könnyen kimutatható, hogy a síkban L-en, a körön és az egyenessel $\|$ görbéken kívül más görbe nincsen, a melynek görbülete minden pontjában egy és ugyanaz volna.

IV. A körre nézve (úgy mint III.-ban) nyerjük, hogy

$$\frac{d\odot x}{dx}\backsim \bigcirc x,$$

a miből (a 30. §. tekintetbe vételével) integrálás segítségével kiadódik, hogy

$$\odot\, x=\pi i^2(e^{\frac{x}{i}}-2+e^{-\frac{x}{i}}).$$

V. (9. ábra). Az (L-alakú $ab=r$, az evvel $\|$ $cd=y$ és az $ac=$ $=bd=x$ egyenesek határolta)

$$cabdc=u$$

Így tehát lesz:

$$\frac{dy}{bh} \sim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1+\frac{dy^2}{bh^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \sim X\,(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

és végre

$$\frac{dz}{dx} \sim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Az utolsóból integrálás útján kiadódik, hogy

$$z=i(X^2-1)^{\frac{1}{2}}=i\cot cbn \quad \text{(úgy mint a 30. §-ban).}$$

III. Világos, hogy

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{hfcbh}{dx}.$$

Ha az utóbbi kifejezést (ha csak már elejétől fogva nincsen y-nal kifejezve) előbb y-nal fejezzük ki, ebből integrálás segítségével meghatározhatjuk u-t.

Ha a 12. ábrában

$$ab=p, \quad ac=q, \quad cd=r$$

és

$$cabdc=s,$$

akkor (úgy mint II.-ben) megmutathatjuk, hogy

$$\frac{ds}{dq} \sim r=\tfrac{1}{2}p\left(e^{\frac{q}{i}}+e^{-\frac{q}{i}}\right),$$

a miből integrálás útján kiadódik, hogy

$$s=\tfrac{1}{2}pi\left(e^{\frac{q}{i}}-e^{-\frac{q}{i}}\right).$$

Ugyanerre az eredményre reájuthatunk integrálás nélkül is.

Ha p. o. a kör egyenletét (a 31. §. III. alapján), az egyenes egyenletét (a 31. §. II. alapján) és a kúpszeletek egyena 0 határértékhez közeledik (ez az ilyen határértékek meghatározásánál mindig magától értetődik): akkor ezekből $\frac{dy}{bh}$ és evvel együtt tg hbg határértéke is fog kiadódni. Így tehát (mert hbc nyilván R-nél sem nagyobb, sem kisebb nem lehet, és így R-rel csakis egyenlő lehet) ezzel *meg van határozva a b pontban a bg vonal y érintője által.*

II. Bebizonyítható, hogy

$$\frac{dz^2}{dy^2+bh^2} \frown 1.$$

Ebből kiszámítható $\frac{dz}{dx}$ határértéke, a melyből azután *z (x által kifejezve)* integrálás útján nyerhető.

S-ben levezethetjük valamely concret módon megadott vonal egyenletét is. Például szolgáljon erre L.

Ha $a\overline{m}$ L-nek tengelye, akkor az $a\overline{m}$ valamely pontjából kiinduló bármely $c\overline{b}$ metszeni fogja L-et (mert a 19. §. szerint, $a\overline{m}$ kivételével minden az a ponton átmenő egyenes még egy pontban metszi L-et). Így tehát (hogy ha $b\overline{n}$ is tengely a 28. §. szerint) lesz:

$$X=1:\sin cbn$$

és (a 29. §. szerint)

$$Y=\cot \tfrac{1}{2} cbn.$$

Ezekből következik, hogy

$$Y=X+\sqrt{X^2-1},$$

vagyis

$$e^{\frac{y}{i}}=e^{\frac{x}{i}}+\sqrt{e^{\frac{2x}{i}}-1}.$$

[16] Ez a keresett egyenlet.

Ebből nyerjük, hogy

$$\frac{dy}{dx} \frown X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}},$$

valamint azt is, hogy

$$\frac{bh}{dx}=1:\sin cbn=X.$$

Ezekből világos, (hogy ha általánosságban $\bigcirc x^2$-tel a $\bigcirc x \bigcirc x$ szorzatot jelöljük), hogy

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Ámde (a 27. §. és II. szerint)

$$\bigcirc d = \bigcirc b . \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

a miből következik, hogy

$$(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}})^2 = \tfrac{1}{4}(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})^2 (e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}})^2 + (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})^2.$$

Ez más egyenlet, a mely az a, b és c között áll fenn (s ennek jobb oldala [15] könnyen symmetrikus alakra hozható).

Végre abból, hogy

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}), \quad \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1})$$

(III. szerint) következik, hogy

$$\cot \alpha \cot \beta = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}).$$

(Ez az α, β és c között fennálló egyenlet).

32. §. Hátra van még, hogy röviden bemutassuk azokat a módszereket, a melyek szerint S-ben adott *problémák* megoldhatók és miután ez (a leggyakrabban előforduló példák tárgyalása alapján) megtörtént, végre világosan ki fogjuk fejteni, hogy elméletünknek mi a czélja.

I. (17. ábra). Legyen $\overline{ab}$ valamely vonal a síkban, a melynek (derékszögű coordinatákra vonatkozó) egyenlete

$$y = f(x);$$

jelöljük dz-vel z valamely növekményét és x, y és az u terület ugyanezen dz-nek megfelelő növekményeit pedig dx-, dy-, du-val; legyen továbbá

$$bh \parallel cf;$$

azután pedig (a 31. §. szerint) fejezzük ki $\frac{bh}{dx}$-et y segítségével és határozzuk meg $\frac{dy}{dx}$ *határértékét,* abban az esetben, midőn dx

területre nézve lesz:

$$\frac{du}{dx} \sim y,$$

hol (a 24. §. szerint)

$$y = re^{-\frac{x}{i}}.$$

Ebből (integrálás segítségével) kiadódik, hogy

$$u = ri\left(1 - e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

Ha x minden határon túl nő, akkor S-ben

$$e^{-\frac{x}{i}} \sim 0$$

és ezért lesz:

$$u \sim ri.$$

A következőkben az *mabn mérőszáma* alatt ezt a határértéket fogjuk érteni.

Ha p F-nek valamely idomát jelenti, akkor hasonló módon találjuk, hogy az a térfogat, a melyet p és a p határszéléből kiinduló tengelyek összessége határol, $\frac{1}{2}pi$-vel egyenlő.

VI. Ha a z gömbsüvegnek megfelelő középponti szög $2u$ (10. ábra), valamely legnagyobb kör kerülete p és (az u szögnek megfelelő ív) $fc = x$, akkor (a 25. §. szerint)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc bc$$

[18] és ebből következik, hogy

$$\bigcirc bc = p \sin u.$$

Ezen kívül még

$$x = \frac{pu}{2\pi} \quad \text{és} \quad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

Továbbá

$$\frac{dz}{dx} \sim \bigcirc bc$$

és így

$$\frac{dz}{du} \sim \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

a miből (integrálással) kiadódik, hogy

$$z = \frac{\sin vers\, u}{2\pi} p^2.$$

Képzeljük el azt az F-et, a mely a (gömbsüveg f középpontján átmenő) p-t tartalmazza; továbbá az $\overline{fem}$ és $\overline{cem}$ síkokat, a melyek af-en és ac-n átmennek, F-re $\perp$-ek és ezt feg-ben és ce-ben metszik és vizsgáljuk meg (a c-ből feg-re merőlegesen bocsátott) L-alakú cd-t és az L-alakú cf-et: akkor látjuk, hogy (a 20. §. szerint) lesz:

$$cef=u$$

és (a 21. §. szerint)

$$\frac{fd}{p}=\frac{\sin vers\, u}{2\pi},$$

a miből következik, hogy

$$z=fd\,.\,p.$$

Ámde (a 21. §. szerint)

$$p=\pi\,.\,fdg$$

és ezért

$$z=\pi\,.\,fd\,.\,fdg.$$

De (a 21. §. szerint)

$$fd\,.\,fdg=fc\,.\,fc,$$

a miből következik, hogy

$$z=\pi fc\,.\,fc=\odot fc\ (F\text{-ben}).$$

Legyen már most (a 14. ábrában)

$$bj=cj=r,$$

akkor (a 30. §. szerint)

$$2r=i(Y-Y^{-1}),$$

és így (a 21. §. szerint)

$$\odot 2r\ (F\text{-ben})=\pi i\,(Y-Y^{-1})^2.$$

(IV.-ben) azonban találtuk, hogy

$$\odot 2y=\pi i^2(Y^2-2+Y^{-2}),$$

a miből következik, hogy

$$\odot 2r\ (F\text{-ben})=\odot 2y.$$

Így tehát nyerjük, hogy *a z gömbsüveg felszine egyenlő oly körrel, a melynek sugara az fc húrral egyenlő.*

Ebből következik, hogy *az egész gömb felszinét*

$$\odot fg=fdg\,.\,p=\frac{p^2}{\pi}$$

szolgáltatja.

Gömbök felszinei tehát úgy viszonylanak egymáshoz mint legnagyobb köreik kerületeinek második hatványai.

VII. Hasonló módon találjuk, hogy S-ben *az x sugárral leírt gömb térfogatát*

$$\tfrac{1}{2}\pi i^3(X^2-X^{-2})-2\pi i^2 x$$

szolgáltatja.

Azt a felületet, a mely a cd vonalnak (12. ábra) az ab körül való forgatása révén származik,

$$\tfrac{1}{2}\pi i p(Q^2-Q^{-2})$$

és a $cabdc$ leírta térfogatot pedig

$$\tfrac{1}{4}\pi i^2 p(Q-Q^{-1})^2$$

szolgáltatja.

Annak bemutatását, hogy miképen lehet azokat az eredményeket, a melyeket a IV. ponttól kezdve egészen idáig nyertünk, integrálás nélkül levezetni, rövidség kedvéért mellőzzük.

Be lehet bizonyítani, hogy *a határérték, a melyhez minden egyes az i-t tartalmazó (és így i létezésének hypothesise alapján* [19] *levezetett) kifejezés akkor közeledik, midőn i minden határon túl növekedik, a megfelelő Σ-beli mennyiséget szolgáltatja (a melyben semmiféle i létezését nem tételezzük fel). Ez alól kivételt tesznek azok az esetek, a midőn az i-t tartalmazó egyenletek a határátmenet következtében identitásokba mennek át. Óvakodnunk kell azonban attól, hogy ezt arra magyarázzuk, hogy maga a rendszer is (a mely teljes meghatározását önmagában és önmagától nyeri) változhatik; csupán csak a hypothesis változhatik és ezt mindaddig változtathatjuk, a míg ellenmondásra nem jutunk. Ha tehát megállapítjuk, hogy abban az esetben, a melyben S volna a valóságnak megfelelő rendszer, minden olyan kifejezésben i azt az egyértelműleg meghatározott mennyiséget jelenti, a melynek megfelelőleg I=e; ellenben, ha a valóságnak Σ felelne meg, az illető kifejezések helyébe azoknak fennebb jellemzett határértékeit teszszük: akkor világos, hogy mindama kifejezések, a melyeket S valódiságának feltételezése mellett nyerünk, (ilyen értelemben) feltétlenül érvényesek még akkor is, ha egyáltalában eldöntetlen marad, vajjon Σ létezik-e vagy nem.*

Így p. o. a 30. §-ban nyert eredményből (akár differentiálás segítségével, akár pedig a nélkül) könnyen leszármaztatható a Σ-ban ismeretes eredmény:

$$\bigcirc x = 2\pi x.$$

A 31. §. I. alatti eredményéből a szokásos módszerek segítségével nyerjük, hogy

$$1 : \sin \alpha = c : a;$$

II.-ből pedig, hogy

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = 1,$$

a miből következik, hogy

$$\alpha + \beta = R.$$

III. első egyenlete identitásba megy át és így Σ-ban is érvényes, noha itt semmit sem határozhatunk meg belőle; a második egyenlet azonban folyik, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ezek mind a sík trigonometriájának ismeretes alapegyenletei Σ-ban.

Azt találjuk továbbá, hogy a jelen §. III. pontjában jellemzett felület és térfogat mértéke Σ-ban egy és ugyanaz, t. i. pq.

IV.-ből következik, hogy

$$\odot x = \pi x^2,$$

VII.-ből pedig, hogy az x sugárral leírt gömb térfogata $\frac{4}{3}\pi x^3$ stb.

A VI. pont végén kimondott tételek nyilván mindannyian *feltétlenül érvényesek.*

33. §. Hátra van még (a mit már a 32. §-ban megigértünk), hogy kifejtsük, mire való a tárgyalt elmélet.

I. *Eldöntetlen marad, vajjon Σ-e vagy pedig S a valóságnak megfelelő rendszer.*

II. *Minden eredmény, a melyet úgy vezetünk le, hogy (a 32. §. felfogása szerint) a XI. axioma helytelenségét tételezzük fel, feltétlenül érvényes és így e felfogás mellett semmiféle hypothesisen nem alapszik. Van e szerint olyan a priori sík trigonometria,* *a melyben eldöntetlen marad, hogy melyik a valóságnak megfelelő rendszer* és a melyben ezért [20] csakis a kifejezések absolut nagysága nincsen meghatározva, míg az egész rendszert nyilván *egyetlenegy* ismeretes eset alapján állandósíthatjuk. *A gömb trigonometriája ellenben a 26. §-ban feltétlen érvényességgel nyerte megalapítását. (A Σ rendszer sík geometriájával teljesen analog a geometria F-ben.)*

III. *Ha biztos volna, hogy Σ a valóságnak megfelelő rendszer,* akkor e tekintetben már semmi sem maradna ismeretlen; ha ellenben *biztos volna az, hogy Σ a valóságban nem lehetséges,* akkor világos, hogy (p. o.) abban az esetben, a melyben valamely háromszög x és y oldalai és az általuk bezárt egyenes vonalú szög valami *concrét módon meg volnának adva,* e háromszög absolut megoldása (a 31. §. alapján) önmagában még nem lehetséges, azaz, hogy a többi szögeket és a *harmadik oldal viszonyát* a két megadotthoz nem határozhatnók meg a priori a nélkül, hogy X-et és Y-t is ismernők. Erre pedig szükséges, hogy valamely *concrét módon megadott* a-hoz a hozzátartozó A ismeretes legyen. Akkor majd i lesz a *természetes hossz-egység* (a mint e a természetes logarithmusok alapszáma). Hogy ezt az i-t — hogy ha létezését föltételezzük — miképen lehet legalább a gyakorlati alkalmazás céljainak megfelelőleg lehetőleg nagy pontossággal megszerkeszteni, azt még meg fogjuk mutatni.

IV. Világos, hogy az I. és II.-ben kifejtett felfogás mellett, minden a térre vonatkozó kérdést a modern analytikai módszerrel dönthetünk el (a mely a kellő határok közt alkalmazva elég célszerűnek is bizonyul).

V. Végre kellemes lesz majd a szíves olvasónak, ha majd megmutatjuk, *hogy abban az esetben, a midőn nem Σ, hanem S felelne meg a valóságnak, miképen lehetne a körrel egyenlő egyenes vonalú idomot megszerkeszteni.*

34. §. (12. ábra). *A d-n átmenő dm ||| an a következő módon szerkeszthető meg:*

Legyen d-ből

$$db \perp an;$$

emeljük az $\overline{ab}$ egyenes valamely tetszés szerinti a pontjában ac-t merőlegesen an-re (dba-ban) és bocsássuk de-t merőlegesen ac-re: akkor feltételezve, hogy

$$dm \,|||\, bn,$$

(a 27. §. szerint) lesz:

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = 1 : \sin z.$$

Ámde $\sin z$ nem nagyobb 1-nél és ezért ab sem nagyobb de-nél. Hogy ha tehát a de-vel egyenlő radiussal az a középpont körül bac-ben negyedkört írunk le, ennek közös pontja bd-vel vagy b, vagy pedig o lesz. Az első esetben világos, hogy

$$z = R,$$

az utóbbi esetben ellenben (a 25. §. szerint) lesz:

$$(\bigcirc ao = \bigcirc ed) : \bigcirc ab = 1 : \sin aob,$$

és ebből következik, hogy

$$z = aob.$$

Ha tehát

$$z = aob,$$

akkor lesz:

$$dm \,|||\, bn.$$

[21] 35. §. (18. ábra). *Ha a valóságnak megfelelő rendszer S volna, akkor oly egyenest, a mely valamely hegyes szög egyik szárára* $\perp$, *másik szárával pedig* $|||$ a következő módon szerkeszthetünk:

Legyen:

$$am \perp bc$$

és (a 19. §. szerint)

$$ab = ac$$

oly kicsiny, hogy midőn (a 34. §. szerint) bn-t a

$$bn \,|||\, am$$

feltételnek megfelelőleg megszerkesztjük, abn nagyobb legyen az adott szögnél; szerkeszszük meg továbbá (a 34. §. szerint) a

$$cp \,|||\, am$$

feltételnek megfelelő cp-t és nbq, pcd, mind a kettő legyen egyenlő az adott szöggel; akkor $\overline{bq}$ (a mely a *szerkesztésénél fogva* nbc-n belül esik) $\overline{cp}$-t e-ben fogja metszeni és minthogy

$$bn \stackrel{\frown}{=} cp$$

lesz:

$$ebc < ecb,$$

a miből következik, hogy

$$ec < eb.$$

Legyen:

$$ef = ec, \quad efr = ecd \quad \text{és} \quad fs \,|||\, ep;$$

akkor fs-nek bfr-en belül kell esnie. Ugyanis, minthogy

$$bn \,|||\, cp,$$

egyszersmind lesz:

$$bn \,|||\, ep, \quad bn \,|||\, fs,$$

a miből (a 14. §. szerint) következik, hogy

$$fbn + bfs < (2R = fbn + bfr)$$

és ebből ismét, hogy

$$bfs < bfr.$$

Így tehát $\overline{fr}$ metszeni fogja $\overline{ep}$-t, a miért majd $\overline{cd}$ is $\overline{eq}$-t bizonyos d pontban metszi. Legyen továbbá

$$dg = dc$$

és

$$dgt = dcp = gbn;$$

akkor (minthogy $cd \stackrel{\frown}{=} gd$) lesz:

$$bn \stackrel{\frown}{=} gt \stackrel{\frown}{=} cp.$$

Ha a $\overline{bn}$-hez tartozó L-nek $\overline{bq}$-ba eső pontja (l. 19. §.) k és tengelye kl volna, akkor lenne:

$$bn \stackrel{\frown}{=} kl,$$

a miből következnék, hogy

$$bkl = bgt = dcp.$$

Ámde akkor egyszersmind

$$kl \stackrel{\frown}{=} cp$$

lenne, a miből világos, hogy k-nak g-vel egybe kell esnie és hogy

$$gt \parallel bn.$$

Hogy ha tehát ho bg-t merőlegesen felezi, akkor ezzel megszerkesztettük a

$$ho \parallel bn$$

feltételnek megfelelő egyenest.

36. §. (10. ábra). Legyen adva a $c\bar{p}$ egyenes és az $\overline{mab}$ sík; legyen

$$cb \perp \overline{mab};$$

(a $\overline{bcp}$-ben fekvő)

$$bn \perp bc$$

és (a 34. §. szerint)

$$cq \parallel bn:$$

akkor (hogy ha $c\bar{p}$ bcq-n belül esik) megtalálhatjuk majd $c\bar{p}$ metszését (a $c\overline{bn}$-ben fekvő) $b\bar{n}$-nel, és így $\overline{mab}$-vel is. Hogy ha pedig adva van két sík, $\overline{pcq}$ és $\overline{mab}$ és

$$cb \perp \overline{mab}, \quad cr \perp \overline{pcq}$$

továbbá ($\overline{bcr}$-ben)

$$bn \perp bc, \quad cs \perp cr:$$

akkor bn-nek $\overline{mab}$-be és cs-nek $\overline{pcq}$-ba kell esnie. Ha $b\bar{n}$ és $c\bar{s}$ metszéspontját (hogy ha azok egymást egyáltalában metszik) megtaláltuk, akkor világos, hogy pcq amaz egyenese, a mely e pontban merőlegesen áll $c\bar{s}$-re, az $\overline{mab}$ és $\overline{pcq}$ metszése.

37. §. (7. ábra). *Ha*

$$am \parallel bn,$$

akkor $a\bar{m}$-ben oly a található, a melyre nézve

$$[22] \quad am \triangleq bn.$$

Szerkeszszük meg (a 34. §. szerint) $\overline{nbm}$-en kívül gt-t oly módon, hogy

$$gt \parallel bn$$

legyen és legyen:

$$bg \perp gt, \quad gc = gb, \quad cp \parallel gt;$$

vegyük fel $tg\bar{d}$-t oly módon, hogy $tg\bar{b}$-vel a $pc\bar{a}$ és $pc\bar{b}$ alkotta szöggel egyenlő szöget alkosson; határozzuk meg továbbá (a 36. §. szerint) $tg\bar{d}$ és $nb\bar{a}$ metszését, $d\bar{q}$-t és végre legyen:

$$ba \perp dq.$$

A $b\bar{n}$-hez tartozó F-ben kimetszett L vonalok alkotta háromszögek hasonlóságából (21. §.) világos, hogy

$$db = da \quad \text{és} \quad am \mathrel{\hat{=}} bn.$$

Ezekből könnyen megérthető hogy *a csupán csak végpontjaik segítségével megadott L vonalokhoz megszerkeszthetők a 4-dik arányos és a középarányos végpontjai is és hogy az összes szerkesztések, a melyek Σ feltételezése mellett a síkban elvégezhetők, F-ben ugyanazon módon a XI. axioma nélkül végezhetök el.* Így p. o. $4R$ bizonyos számú egyenlő részre geometriailag osztható fel akkor, hogy ha ugyanezt a felosztást Σ-ban el tudjuk végezni.

38. §. (14. ábra). Ha (a 37. §. szerint) megszerkesztjük nbq-t oly módon, hogy p. o. legyen:

$$nbq = \tfrac{1}{3} R,$$

továbbá S feltételezése mellett (a 35. §. szerint) am-et merőlegesen $b\bar{q}$-ra oly módon hogy

$$am \mid\mid\mid bn$$

legyen és (a 37. §. szerint) meghatározzuk azt a j-t, a melyre nézve

$$jm \mathrel{\hat{=}} bn:$$

akkor, hogy ha még

$$ja = x,$$

(a 28. §. szerint) lesz:

$$X = 1 : \sin \tfrac{1}{3} R = 2$$

és evvel x geometriai úton meg van szerkesztve. Kiszámíthatjuk nbq-t oly módon, hogy ja bármely adott mennyiségnél kevesebbet különbözzék i-től, a melylyel pontosan válik egyenlővé, midőn

$$\sin nbq = \frac{1}{e} \cdot$$

39. §. (19. ábra). Ha (valamely síkban a 27. §. értelmében) pq és st $\|$-ok az mn egyenessel és ab, cd merőlegesek mn-re és egymással egyenlők: akkor világos, hogy

$$\Delta dec \equiv \Delta bea.$$

Ebből következik, hogy az (esetleg vegyes vonalak alkotta) ecp és eat szögek is congruensek egymással és hogy

$$ec = ea.$$

Ha továbbá

$$cf = ag,$$

akkor

$$\Delta acf \equiv \Delta cag$$

lesz úgy, hogy mindegyikük fele az *fagc négyszögnek*. Hogy ha *fagc*, *hagk* két ilyen pq és st által közbefoglalt és ugyanazon az ag alapon álló négyszög: akkor ezekről, valamint az ugyanazon az ag alapon álló agc és agh háromszögekről, a melyeknek csúcsát $\overline{pq}$ magában foglalja (épúgy mint Euklidesnél) bebizonyítható, hogy egyenlők egymással. Minthogy továbbá még

$$acf = cag, \quad gcq = cga$$

és (a 32. §. szerint)

$$acf + acg + gcq = 2R,$$

[23] ezért lesz:

$$cag + acg + cga = 2R.$$

Így tehát minden ilyen fajta háromszögben a három szög összege egyenlő $2R$-rel. Akár összeesik (az mn-nel $\|$) ag az ag egyenessel, akár nem, úgy *maguknak az egyenes vonalú agc, agh háromszögeknek, valamint szögeik összegének egyenlősége* nyilvánvaló.

40. §. (20. ábra). *Az egymással egyenlő abc, abd háromszögekben (ezentúl háromszög alatt mindig egyenes vonalút értve), a melyeknek egyik oldaluk egyenlő, a szögek összege is egyenlő.*

Felezze ugyanis mn úgy ac-t mint bc-t is és legyen (a c-n átmenő)

$$pq \| mn:$$

akkor d-nek $\overline{pq}$-ba kell esnie. Mert ha $b\overline{d}$ $\overline{mn}$-et az e pontban és ezért (a 39. §. szerint) $\overline{pq}$-t az $ef=be$ távolságban metszené: lenne:

$$\Delta abc=\Delta abf,$$

a miből következnék, hogy

$$\Delta abd=\Delta abf,$$

vagyis, hogy d összeesik f-fel. Hogy ha azonban $b\overline{d}$ nem metszené $\overline{mn}$-et, legyen c az a pont, a melyben az ab-t merőlegesen felező egyenes $\overline{qp}$-t metszi; válaszszuk továbbá gs-et és ht-t oly módon, hogy

$$gs=ht$$

legyen és hogy $s\overline{t}$ a meghosszabbított $b\overline{d}$-t valamely k pontban messe (a miről a 4. §. módjára kimutatható, hogy ez lehetséges); legyen továbbá:

$$sl=sa, \quad lo \,||\, st$$

és o bk és $\overline{to}$ metszéspontja: akkor (a 39. §. szerint) lenne:

$$\Delta abl=\Delta abo;$$

ebből pedig (a feltevés ellenére) következnék, hogy

$$\Delta abc>\Delta abd.$$

41. §. (21. ábra). *Az egymással egyenlő abc, def háromszögekben a szögek összege egyenlő.*

Felezze ugyanis mn ac-t és bc-t, pq pedig df-et és fe-t és legyen:

$$rs \,||\, mn, \quad to \,||\, pq:$$

akkor az rs-re merőleges ag vagy egyenlő lesz a to-ra merőleges dh-val, vagy pedig egyikük, p. o. dh a nagyobb lesz a kettő közűl. Ezeknek az eseteknek bármelyikében az a körül leírt $\bigcirc df$-nek közös k pontja lesz $g\overline{s}$-sel és ezért (a 39. §. szerint)

$$\Delta abk=\Delta abc=\Delta def.$$

Ámde (a 40. §. szerint) Δakb-ben a szögek összege ugyanaz, mint Δdfe-ben és (a 39. §. szerint) Δabc-ben. Így tehát az abc és def háromszögekben is a szögek összege ugyanaz.

S-ben e tétel még is fordítható. Legyen ugyanis az abc és def háromszögekben a szögek összege egyenlő és

$$\Delta bal = \Delta def;$$

akkor (az előbbiek szerint) ebben az utóbbi két háromszögben, és így Δabc-ben és Δabl-ben is a szögek összegének egyenlőnek kellene lennie, a miből következnék, hogy

$$bcl + blc + cbl = 2R.$$

Minthogy azonban (a 31. §. szerint) S-ben bármely 24] háromszög szögeinek összege kisebb $2R$-nél, l-nek c-vel egybe kell esnie.

42. §. (22. ábra). *Ha Δabc-ben u, Δdef-ben pedig v egészíti ki a szögek összegét $2R$-re, akkor*

$$\Delta abc : \Delta def = u : v.$$

Legyen ugyanis az acg, gch, hcb, dfk, kfe háromszögek mindegyikének területe p-vel egyenlő és

$$\Delta abc = mp, \quad \Delta def = np;$$

legyen továbbá s a szögek összege ama háromszögek egyikében, a mely egyenlő p-vel: akkor világos, hogy

$$2R - u = ms - (m-1)\,2R = 2R - m\,(2R - s),$$

vagyis, hogy

$$u = m\,(2R - s).$$

Hasonlóképen nyerjük, hogy

$$v = n\,(2R - s).$$

Így tehát lesz:

$$\Delta abc : \Delta ef = m : n = u : v.$$

Könnyű a bebizonyítást arra az esetre is kiterjeszteni, a melyben Δabc és Δdef incommensurabilisek.

Hasonló módon bizonyítható be, hogy valamely gömb felületén levő háromszögek úgy viszonylanak egymáshoz, mint az excessusok, a melyekkel az illető háromszögekben a szögek öszszege felülmulja $2R$-t. Hogy ha valamely gömbháromszögben 2 szög derékszög, akkor a harmadik, z egyenlő lesz az említett excessussal. De ez a háromszög (ha p a legnagyobb kör kerületét jelenti, a 32. §. VI. pontja szerint) nyilván egyenlő $\frac{z}{2\pi}\frac{p^2}{2\pi}$-vel, a miből következik, hogy minden háromszög, a melyben a szögek excessusa z, egyenlő $\frac{zp^2}{4\pi^2}$-val.

43. §. (15. ábra). Most már *fejezzük ki S-ben az egyenes vonalú háromszög területét a szögek összegével.*

Hogy ha ab minden határon túl nő, akkor (a 42. §. szerint)

$$\Delta abc:(R-u-v)$$

állandóan meg fogja tartani értékét. De (a 32. §. V. pontja szerint)

$$\Delta abc \sim bacn$$

és (az 1. §. szerint)

$$R-u-v \sim z,$$

a miből következik, hogy

$$bacn:z=\Delta abc:(R-u-v)=bac'n'.z'.$$

Továbbá (a 30. §. szerint) világos, hogy

$$bdcn:bd'c'n'=r:r'=\operatorname{tg} z:\operatorname{tg} z'.$$

Ha azonban

$$y' \sim 0,$$

akkor

$$\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \sim 1$$

és

$$\frac{\operatorname{tg} z'}{z'} \sim 1,$$

a miből következik, hogy

$$bdcn:bacn=\operatorname{tg} z:z.$$

De (a 32. §-ban) találtuk, hogy

$$bdcn=ri=i^2 \operatorname{tg} z$$

és így tehát lesz :

$$bacn=zi^2.$$

Ha tehát ezen túl oly háromszöget, a melyben a szögek összegét z egészíti ki $2R$-re röviden Δ-val jelöljük, akkor

$$\Delta = zi^2.$$

Ha (a 14. ábrában)

$$or \parallel\!| \; am \quad \text{és} \quad ro \parallel\!| \; ab,$$

akkor az előbbiből könnyen levezethető, hogy az $\overline{or}$, $\overline{st}$, $\overline{bc}$ egyenesektől befoglalt területet [25] (a mely nyilván a minden határon túl növekedő egyenes vonalú háromszögek területének absolut határértéke, vagyis Δ határértéke, midőn $z \frown 2R$) megadja:

$$\pi i^2 = \odot i \ (F\text{-ben}).$$

Hogy ha ezt a határértéket $\square$-val jelöljük, akkor a 15. ábrában (a 30. §. szerint) továbbá lesz:

$$\pi r^2 = \mathrm{tg}^2 z \square = \odot r \ (F\text{-ben}) \ (21.\ \S.) = \odot s \ (32.\ \S.\ \mathrm{VI.}),$$

a hol s a dc húrt jelenti. Ha már mostan a síkban megadott kör s (vagy az F-ben megadott kör L-alakú) sugarát merőlegesen felezve (a 34. §. szerint) megszerkesztjük db-t oly módon, hogy

$$db \parallel\!| \stackrel{\frown}{=} cn$$

legyen; továbbá c-ből ca-t merőlegesen bocsátjuk db-re és c-ben a cm merőlegest emeljük ca-ra: akkor ezzel megkapjuk z-t. Ha tehát egységül valamely tetszés szerinti L-alakú sugarat választunk, akkor ebből (a 37. §. szerint) *geometriai úton megszerkeszthetjük* $tg^2 z$*-t két olyan minden pontjában egyenlő görbületű (uniformis) vonal segítségével, a melyekben a görbület ugyanaz.* (Ezek, hogy ha végpontjaik és tengelyeik ismeretesek, nyilván ugyanúgy mérhetők egymással mint az egyenesek és e szempontból az egyenesekkel egyenlő értékűeknek tekinthetők.)

Továbbá p. o. oly szabályos négyszöget, a mely egyenlő $\square$-tel, a következő módon szerkeszthetünk meg:

Legyen (23. ábra)

$$abc = R, \quad bac = \tfrac{1}{2} R, \quad acb = \tfrac{1}{4} R$$

és

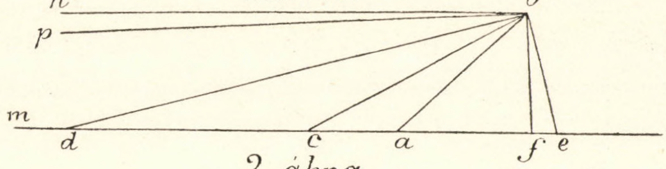
$$bc = x:$$

akkor X (a 31. §. II. szerint) tisztán négyzetgyökök segítségével lesz kifejezhető és (a 37. §. szerint) meg is szerkeszthető. Ha pedig X már meg van, akkor (a 38. §., vagy pedig a 29. és 35. §§. szerint) x is meghatározható. De Δabc nyolczszorosa nyilván egyenlő $\square$-tel, és így *evvel, segítségül véve egy bizonyos egyenes vonalú idomot és egy és ugyanahhoz a nemhez tartozó minden pontjukban egyenlő görbületű görbéket (a melyek az egymással való összehasonlítás tekintetében úgy viselkednek mint egyenesek), elvégeztük a s sugárral leírt síkbeli körnek geometriai quadraturáját. Ugyanazon a módon végezhető el valamely az F-ben megadott kör complanátiója is. Így tehát vagy fennáll Euklides XI. axiomája, vagy pedig a kör geometriai quadraturája lehetséges;* de hogy melyik e kettő közül a valóságnak megfelelő, az eddig eldöntetlen maradt.

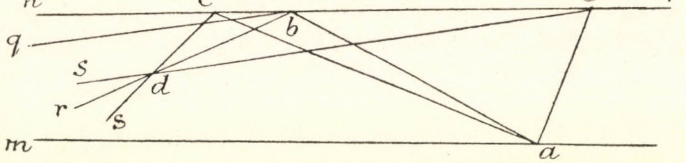
Valahányszor $tg^2 z$ vagy egész szám, vagy oly rationális tört, a melynek legegyszerűbb alakjában a nevező vagy valamely 2^m+1 alakú törzsszám (a melyekhez a $2=2^0+1$ is tartozik), vagy pedig csupa ilyen törzsszámok szorzata, a melyben azonban (a 2 kivételével, mely akárhányszor szerepelhet mint tényezője) mindegyik csakis *egyetlen egyszer* fordulhat elő tényezőképen (és csupán csakis a z-nek ilyen értékei mellett): a hires Gauss-nak
26] a sokszögekre vonatkozó elmélete alapján (a mely korunknak és minden kornak egyik legkiválóbb felfedezése) megszerkeszthető oly egyenes vonalú idom, a mely egyenlő $\mathrm{tg}^2 z \,\square = \odot s$-sel. Ugyanis (a 42. §. tétele könnyen ki lévén terjeszthető tetszés szerinti sokszögekre is) $\square$-nek egyenlő részekre való felosztása végett nyilván fel kell tennünk, hogy $2R$ már ugyanannyi egyenlő részre föl van osztva, a mi (a mint az bebizonyítható) csak is az említett feltétel mellett végezhető el geometriai szerkesztések segítségével. Minden egyes ilyen esetben azonban az előbbiek könnyen czélhoz vezetnek. Sőt, hogy ha n a Gauss-féle alak alá tartozik, akkor bármely egyenes vonalú idom geometriai szerkesztés segítségével n oldalú szabályos sokszögbe átalakítható.

Hogy vizsgálatunk minden tekintetben befejezést nyerjen, be kellene még bizonyítanunk, hogy (hypothesis nélkül) lehetetlen eldönteni, vajjon Σ-e, vagy pedig valamely S (és az utóbbi esetben melyik) felel meg a valóságnak. Ezt azonban kedvezőbb alkalomra halasztjuk.

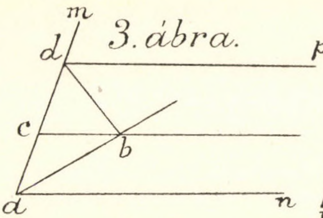
1. ábra.



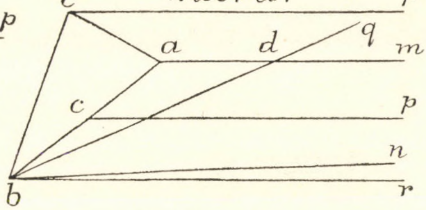
2. ábra.



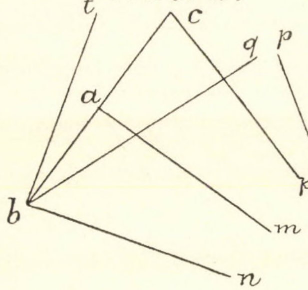
3. ábra.



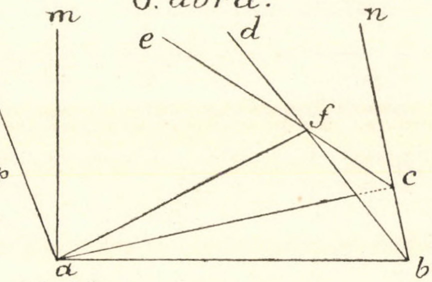
4. ábra.



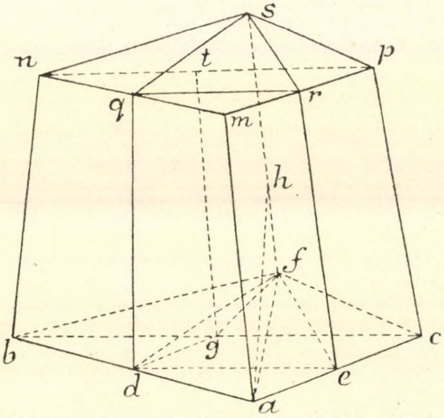
5. ábra.



6. ábra.



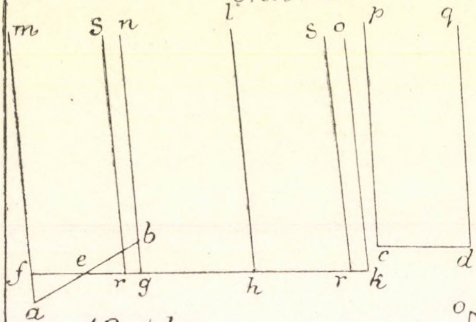
7. ábra.



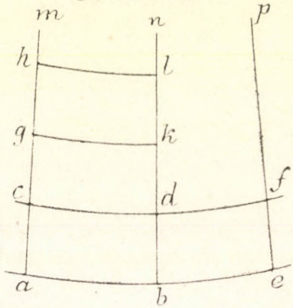
Rajz. Szirtes Ignácz.

II.

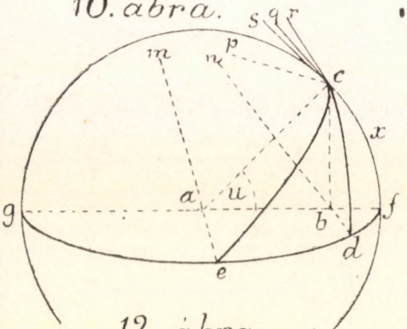
8. ábra.



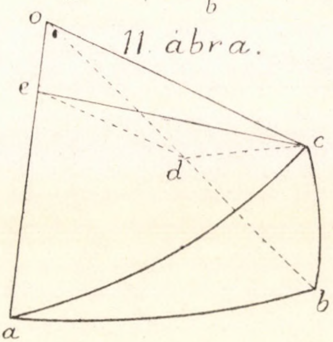
9. ábra.



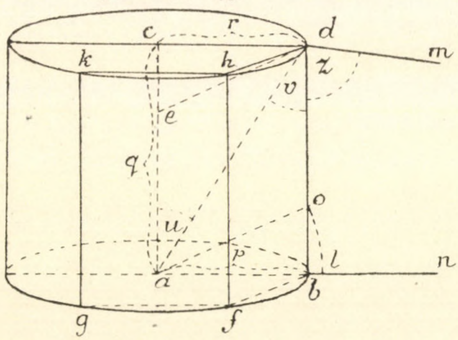
10. ábra.



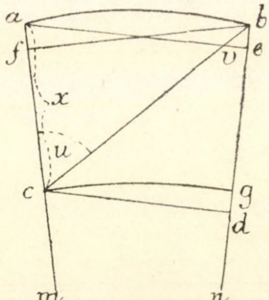
11. ábra.



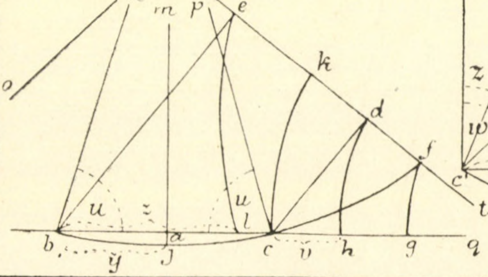
12 ábra.



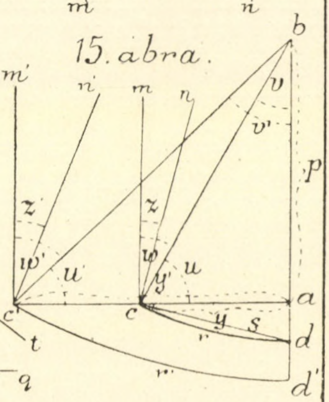
13 ábra.



14. ábra.

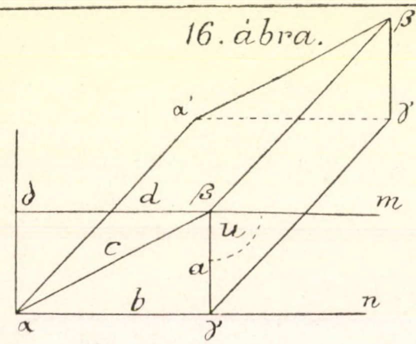


15. ábra.

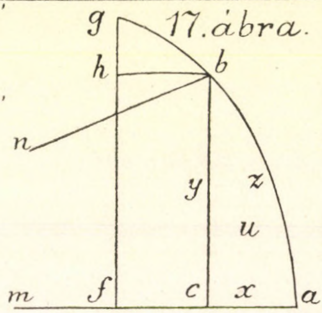


Rajz Szirles Ignacz

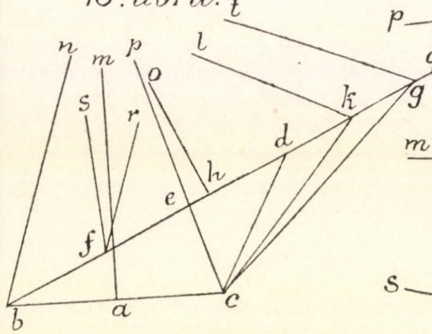
16. ábra.



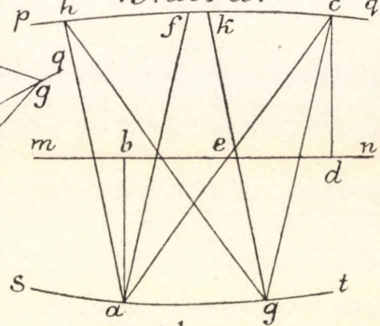
17. ábra.



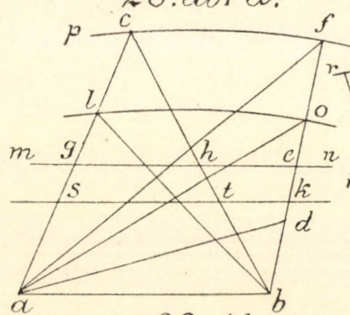
18. ábra.



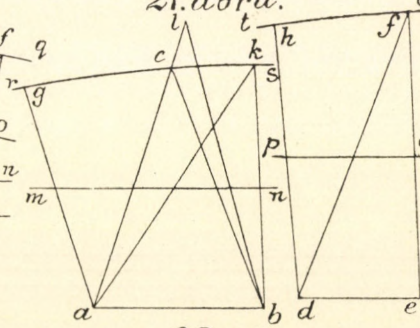
19. ábra.



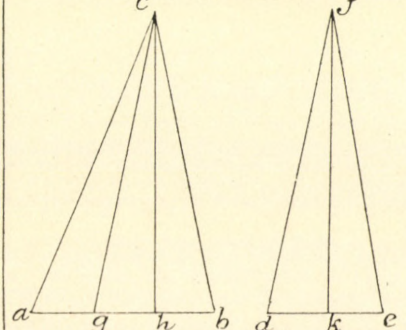
20. ábra.



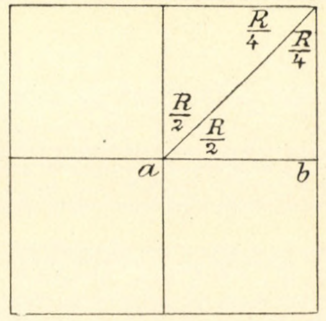
21. ábra.



22. ábra.



23. ábra.



Rajz. Szirtes Ignácz.

AZ
ALGEBRAI ALAKOKRÓL

HATODIK ÉRTEKEZÉS

(A SIXTH MEMOIR UPON QUANTICS)

IRTA

CAYLEY ARTHUR

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

FORDITOTTA

KÁRMÁN FERENCZ

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1897

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

AZ ALGEBRAI ALAKOKRÓL.

Hatodik értekezés.

A jelen értekezésemben a geometria elméletét teszem megfontolás tárgyává: a tárgynak e részére bevezető értekezésemnek 3. és 4. pontjában utaltam. Jelen értekezésem az egy-méretű és a két-méretű geometriára vonatkozik, megfelelően a binær illetőleg a ternær alakok analitikai elméletének. De a binær alakok elméletét önmagában vizsgáltuk át; az egy-méretű geometria oly közvetetlen értelmezése a binær alakok elméletének, hogy azt önmagában nem szükséges teljesen megvizsgálni; vizsgálata a két-méretű geometriára való tekintettel történik. Jelen értekezésem főtárgya a távolság fogalmának tisztán descriptiv elvek alapján való megállapítása. Szándékom volt ebben a bevezető cikkelyben az elméletet körvonalazni, de úgy találom, arra hogy megérthető legyek, erre vonatkozó értekezésem tartalmának nagy részét egészen el kellene mondanom, s ennélfogva elállok tőle. Értekezésem pontjait folytatólagosan számozom az algebrai alakokra vonatkozó előbbi értekezéseim pontjai szerint.

147. Látni fogjuk, hogy jelen értekezésemben az egy-méretű geometria úgy van tárgyalva mint az egyenesen fekvő pontok geometriája és a két-méretű geometria úgy, mint a sikon fekvő pontok és egyenesek geometriája. Azonban nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy megegyezésben a bevezető értekezésem 4-ik pontjával a használt kifejezések nem szorítkoznak csak eredeti jelentésükre (ha csak ez külön megmondva nincs vagy a szövegből ki nem tűnik). Ha az egy-méretű geometriát a két-méretű geometriával vonatkozásban használjuk, ezt a síkon fekvő pontok és

egyenesek geometriájának tekintve, akkor figyelembe kell vennünk, — 1-ször, hogy a pont szó *pontot* jelenthet és az egyenes szó *egyenest*; 2-szor, hogy a pont szó *egyenest* jelenthet és az egyenes szó *pontot*. Ezt azért kell tennünk, mert ebben a két-méretű geometriában az egyenesen fekvő pontok rendszerével és a ponton átmenő egyenesek rendszerével van dolgunk, s mind a két rendszer tényleg az egy-méretű geometriába tartozó rendszer, a mely a kifejezések jelentésének ilyen általánosításával egybefoglalható. S épen azért, mert ily általánosítással a megfelelő tételek közös kijelentésben foglalhatók össze, nem szükséges őket az egy-méretű geometriában külön kimondanunk; a két-méretű geometriában, a hol mind a kétféle rendszerrel foglalkozunk, lehetséges és igen gyakran szükséges és helyes is az ilyen egymásnak megfelelő tételeket külön kimondani. További fejtegetések alapján megjegyezhető, hogy ha az egy-méretű geometriát a három-méretű geometriával való vonatkozásban használjuk, ezt a térben lévő pontok, egyenesek és síkok geometriájának tekintve, szükséges lenne figyelembe venni, — 1-ször, hogy a pont és az egyenes szavak *pontot* illetőleg *egyenest* jelenthetnek; 2-szor, hogy az egyenes szó jelenthet *pontot a síkon,** és a pont szó *egyenest*, így ez a kifejezés egy egyenesen fekvő pontok *egy ponton átmenő és egy síkban fekvő egyeneseket* jelent; 3-szor, hogy az egyenes szó *egyenest* jelenthet és pont szó *síkot*, így ez a kifejezés egy egyenesben fekvő pontok *egy egyenesen átfektetett síkokat* jelent. S ha a két-méretű geometriát vonatkozásban használjuk a három-méretű geometriával, ezt a térben lévő pontok, egyenesek és síkok geometriájának tekintve, figyelembe kellene venni, — 1-ször, hogy a pont, egyenes és sík szavak *pontot* illetőleg *egyenest* és *síkot* jelenthetnek; 2-szor, hogy a pont, egyenes és sík szavak *síkot* illetőleg *egyenest* és *pontot* jelenthetnek. Jelen értekezésemben azonban nem foglalkozom három-méretü geometriával. A mire itt törekszünk

* Sokkal pontosabb volna azt mondani hogy az egyenes szó jelenthet *pontot a síkon és a síkkal*, azaz az egy ponton átmenő és egy síkon fekvő egyenesek helyét. Hozzáadtam 1859 junius 16-án. — C. Á.

az, hogy a kifejezések jelentésének általánosításával, az egy-méretű geometriát, mint az egyenesen fekvő pontok geometriáját és a két-méretű geometriát, mint a síkon fekvő pontok és egyenesek geometriáját tárgyalván, e geometriákat valóban abszolut általánossággal kifejtsük. Megjegyzem, mivel alkalmam lesz erre még egyszer utalni, hogy a két-méretű geometriába különös esetként a sphærikus geometriát is belefoglaljuk; a sík, pont és egyenes szavak ekkor a gömbfelületet; a gömbfelület ivét (legnagyobb körét) és pontját (azaz, szembenfekvő pontpárt) jelentik. Ugyanígy az egy-méretű geometria magában foglalja az íven fekvő pontok esetét és a ponton átmenő ívekét.

148. Itt elismételek egy megjegyzést is, a melyet ugyanabban a 4-ik pontban tettem; az egy-méretű geometriának x, y koordinátái és a két-méretű geometriának x, y, z és ξ, η, ζ koordinátái csakis egy közös szorzóig vannak meghatározva (azaz csakis a koordináták viszonya van meghatározva, nem pedig az abszolut nagyságuk) így ha azt mondjuk, hogy az x, y koordináták egyenlőek a, b-vel, vagyis azt írjuk $x, y=a, b$, csakis azt értjük rajta, hogy $x:y=a:b$, és sohasem kapjuk eredményül azt, hogy $x, y = a, b$, hanem csakis, hogy $x:y = a:b$. Ugyanez áll az x, y, z és ξ, η, ζ koordinátákra nézve. (A két-méretű geometriában azért az $x, y = a, b$-t *egy* egyenletnek tekintjük és úgy mondjuk). De ha ezt egyszer megértettük, semmi ellenvetés sem lehet az ellen, hogy a koordinátákkal úgy bánjunk, mintha teljesen meghatározottak lennének.

Az egy-méretű geometriáról, 149—168. pont.

149. Az egy-méretű geometriában az egyenes számunkra a tér, a hely (locus in quo), a melyet pontokból alkotottnak tekintünk. Az egyenes egyes pontjai az (x, y) koordinátákkal vannak meghatározva, azaz ha ezeknek valamilyen határozott értéket tulajdonítunk, vagyis ha azt írjuk $x, y = a, b$, akkor az egyenesnek egy bizonyos pontját kapjuk. S mondhatjuk azt is, hogy az egyenes az (x, y) koordinátáknak *helye*.

150. Egy lineár egyenlet.

$$(*\between x, y)^1 = 0,$$

mint belátható, egy imént említett alakú $x, y = a, b$ egyenlettel æquivalens, s ennélfogva pontot képvisel. Ily egyenlet

$$(*\between x, y)^m = 0$$

m lineár egyenletre esik szét és ennélfogva m pontból álló rendszert képvisel, vagyis egy m-edrendű pontrendszert. A rendszert alkotó pontokat, vagy a lineár tényezőket vagy a koordinátáknak innen kiadódó értékeit gyököknek nevezzük. Ha $m=1$, egy pontot nyerünk, ha $m=2$ másodrendű alakot kapunk vagyis pontpárt, ha $m=3$ harmadrendű alakot vagy három pontból álló rendszert és így tovább. Az egy-méretű geometriában a pontrendszer az egyedüli előforduló alakzat (v. locus). Az $(*\between x, y)^m$ alakot, ha ez megfelelő, egy betűvel, U-val jelölhetjük, s akkor $U=0$ a pontrendszer egyenlete.

151. Az $$(*\between x, y)^m = 0$$

egyenletnek két vagy több gyöke egymással egyenlő lehet, általában az egyenlet gyökei között az egyenlőségeknek valamilyen rendszere állhat fenn, vagy a mi ugyanaz a rendszer két vagy több egybeeső pontot, illetőleg összeeső pontoknak valamilyen rendszerét tartalmazhatja. Jelesen, ha a diskriminàns eltünik, akkor az egyenletnek két egyenlő gyöke van vagyis a rendszer két összeeső pontot tartalmaz; a másodrendű alak, $(a, b, c\between x, y)^2=0$ esetében, a feltétel $ac-b^2=0$, vagy a mint ez írható $a, b = b, c$; a harmadrendű alak,

$$(a, b, c, d\between x, y)^3=0$$

esetében a feltétel

$$a^2d^2-6abcd+4ac^3+4b^3d-3b^2c^2=0.$$

A megelőző eset a másodrendű alakra nézve az egyedüli speciális eset: a harmadrendű alakra nézve ezenkívül az a speciális esetünk van, hogy mind a három gyök egyenlő, vagyis a harmadrendű alak három összeeső pontra redukálódik; ennek feltételei

$$ac-b^2=0, \quad ad-bc=0, \quad bd-c^2=0,$$

s ezek egyenlő értéküek evvel a két feltétellel

$$a:b=b:c=c:d.$$

Magasabbrendű egyenletekre nézve ez az analitikai kérdés meg van vizsgálva, s a negyed- és ötödrendű alakokra nézve teljesen meg van oldva annak a feltételeit tárgyaló értekezésemben, hogy valamely egyenlet gyökei között egyenlőségeknek adott rendszerei álljanak fenn.*

152. Az

$$(*\between x, y)^m=0$$

egyenletnek valamely kovariánsa, zérussal egyenlővé téve, pontrendszert szolgáltat, a mely az eredeti pontrendszerrel meghatározott kapcsolatban áll. Az invariánsokat illetőleg, mondhatjuk, hogy valamely invariáns eltünése egy bizonyos relácziót jelent a rendszer pontjai között; valamely kovariáns azonos eltünése oly relácziókat jelent a rendszer pontjai között, hogy a derivált pontrendszer, a melyet akkor nyerünk, ha a kovariánst zérussal teszszük egyenlővé, teljesen határozatlan. Ugyanezek a megjegyzések állanak két vagy több egyenlet kovariánsaira és invariánsaira, s az általuk képviselt pontrendszerekre vonatkozólag.

153. Igy arra a két pontpárra, a melyet az

$$(a, b, c\between x, y)^2=0,$$
$$(a', b', c'\between x, y)^2=0,$$

másodrendű egyenletek képviselnek, ha a lineo-lineár (bilineár) invariáns eltünik, azaz, ha

$$ac'-2bb'+ca'=0$$

a harmonikus vonatkozást nyerjük, — a két pontpárról azt mondjuk, hogy egymással harmonikus vonatkozásban állanak, vagy pe-

* Memoir on the Conditions for the Existence of given Systems of Equalities between the Roots of an Equation. Philosophical Transactions, CXLVII. k. (1857), 727—731 l. [150].

dig azt mondjuk, hogy az egyik pontpár két pontja a másik pontpár két pontjára nézve harmonikus két pont. Az analitikai elmélet teljesen ki van fejtve az alakokról szóló ötödik értekezésemben.* A fő eredmények, geometriai alakra hozva, a következők:

1-ször. Ha az egyik pontpár és a másik párnak egy pontja meg van adva, akkor az ilyen második pontpár hátralevő pontja egyértelműen megtalálható.

2-szor. Egy pontpár található, a mely két adott pontpárral harmonikus vonatkozásban áll.

154. E két tétel közül az utóbbiból az involuczió elmélete keletkezik. A két adott pontpárt vonatkozásában, a velök harmonikus párral, négy pont involucziójának nevezzük; s a harmonikus pár pontjait az involuczió (kettős vagy) önönmagukhoz konjugált pontjainak. Három vagy több pontpárból álló rendszert, a melynél a harmadik és minden egyes reá következő pár harmonikus vonatkozásban áll az első és második pár önönmagukhoz konjugált pontjaival, involucziós rendszernek nevezünk. Három pontpárból hat pont involuczióját nyerjük; s világos, hogy ha két pár és a harmadiknak egy pontja adva van, a harmadik pár hátralévő pontja meghatározható. Ugyanígy több pontpárra is, ha két pár és a többi párnak mindegyiknek egy-egy pontja adva van, mindegyik párnak másik pontja meghatározható. Ugyanannak a párnak két pontjáról azt mondjuk, hogy azok egymásnak konjugáltjai; vagy ha két párt adottnak tekintünk, akkor a harmadik pár vagy bármily reákövetkező pár pontjairól azt mondjuk, hogy egymásnak konjugáltjai az adott párokra vonatkozólag. Ez megmagyarázza az önönmagához konjugált pont kifejezést; mert ha a két pár adva van, akkor mindegyik önönmagához konjugált pont tényleg önönmagának konjugáltja, úgy a mint a neve mondja. Más szavakkal bármily két pár és az önönmagukhoz konjugált pontok egyike, ezt egy összeeső pontpárnak tekintve, involucziós rendszert vagy öt pont involuczióját alkotja.

---

* Fifth Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions. CXLVIII. k. (1858), 429—462. l. [156].

155. Az $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ három pontpár involucziós lesz, ha az U, U', U'' négyzetes alakokat ez a lineár reláczió kapcsolja össze $\lambda U+\lambda' U'+\lambda'' U''=0$. Ezt a tulajdonságot, vagy az

$$\begin{vmatrix} a\,, & b\,, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = 0$$

relácziót, a mely belőle következik, igen jól vehetnők az involuczió definicziójának; én azonban egészben véve inkább a harmonikus vonatkozásból vezettem le az involuczió elméletét. A három vagy több pontrendszer közötti lineár reláczió fogalmából mindenesetre sokkal általánosabb involuczió-elmélet következik, erre a tárgyra azonban nem térek ki; mindazonáltal megjegyezhetjük, hogy ha $U=0$, $U'=0$ két egyenlő rendű pontrendszer, akkor mindig található egy ugyanolyan rendű, az adott pontrendszerekkel involucziós $U''=0$ pontrendszer (azaz olyan pontrendszer, a mely a $\lambda U+\lambda' U'+$ $+\lambda'' U''=0$ feltételt kielégíti), még pedig úgy, hogy az $U''=0$ pontrendszer két összeeső pontot tartalmaz; ez, mint belátható, a közönséges involuczió önönmagához konjugált pontja fogalmának általánositása.

156. Az ötödik értekezésemben emlitettem meg, hogy az anharmonikus viszony és a homografia * analitikai elmélete a bilineár (lineo-lineár) binær alakok elméletébe tartozik; ezt geometriailag következőképen bővebben értelmezhetjük: képzeljünk két külön egy-méretű teret vagyis egyenest, az egyiken a koordináták (x, y), a másikon (x, y), s az utóbbiak teljesen függetlenek legyenek az előbbi rendszer koordinátáitól, azaz velök semmiféle vonatkozásban ne álljanak. Ebben semmi nehézség nincs; képzeljünk továbbá egy síkon, vagy a három-méretű térben két egyenest és tanulmányozzuk az egyik egyenes egyes pontjai között (inter se) és a másik egyenes egyes pontjai között (inter se) fennálló analog relácziókat, a nélkül, hogy csak valamiképen figyelemmel lennénk arra a két- vagy három-méretű térre, a melyben történetesen a két egye-

* A homografia szó projektivitást jelent. (Forditó megjegyzése.)

nes van. Helyénvaló megjegyeznünk, hogy ha oly módon beszélünk az egy-méretű terekről, a melyekben az (x, y) illetőleg az (x, y) a koordináták, mintha mindannyian egyenesek volnának, egy oly megszorítást végzünk, a mely teljesen szükségtelen; az egyenes és a pont szavak a két alakzatra nézve különböző jelentéssel használhatók; így például az egyik tér egy *egyenes* lehet és a benne lévő pontok *pontok*; míg a másik tér egy *pont* lehet és benne lévő pontok *egyenesek*, vagy lehet egy *egyenes* és a benne lévő pontok *síkok*.

157. Egy bilineár egyenlet

$$(x-ay)(\mathrm{x}-\alpha\mathrm{y})=0$$

ezt a két pontot jelöli tehát $(x, y=a, 1)$ és $(\mathrm{x}, \mathrm{y}=\alpha, 1)$, a melyek tekintet nélkül egymásra, külön terekben vannak és csupán ez egyenlet révén lépnek egymással ideális kapcsolatba; s az ily bilineár függvény együtthatói között fennálló bármely invariáns természetű reláczió geometriailag relácziót jelent egy az (x, y) koordinátás térben lévő pontrendszer és egy az (x, y) koordinátás térben lévő pontrendszer között; így például ez az egyenlet

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & \alpha, & a\alpha \\ 1, & b, & \beta, & b\beta \\ 1, & c, & \gamma, & c\gamma \\ 1, & d, & \delta, & d\delta \end{vmatrix} = 0$$

az első egyenesen fekvő $(a, 1)$, $(b, 1)$, $(c, 1)$, $(d, 1)$ négy pont és a második egyenesen fekvő $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$, $(\gamma, 1)$, $(\delta, 1)$ négy pont közötti projektivitásnak az egyenlete. Ennek az analitikai elmélete ki van fejtve az ötödik értekezésemben; jelesen ki van ott mutatva, hogy ha az

$$\begin{aligned} A&=(d-a)(b-c), & \mathfrak{A}&=(\delta-\alpha)(\beta-\gamma), \\ B&=(d-b)(c-a), & \mathfrak{B}&=(\delta-\beta)(\gamma-\alpha), \\ C&=(d-c)(a-b), & \mathfrak{C}&=(\delta-\gamma)(\alpha-\beta), \end{aligned}$$

jelöléseket használjuk, akkor a feltétel ezen alakok egyikében fejezhető ki

$$A : B : C = \mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C},$$

a mely egyenletek a két pontrendszer anharmonikus viszonyának egyenlőségét fejezik ki.

158. Mind a két rendszerben lehet a pontok száma négy vagy bármily ennél nagyobb szám; a projektiv rokonság akkor megfelelően ebben az alakban fejeződik ki.

$$\begin{Vmatrix} 1\,, & 1\,, & 1\,, & 1\,, & 1\,, & \ldots \\ a\,, & b\,, & c\,, & d\,, & e\,, & \ldots \\ \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \delta\,, & \varepsilon\,, & \ldots \\ a\alpha, & b\beta, & c\gamma, & d\delta, & e\varepsilon, & \ldots \end{Vmatrix} = 0.$$

A vonatkozás olyan, hogy adva lévén az egyik rendszernek három pontja és a másik rendszernek megfelelő három pontja, az első rendszer bármely negyedik pontjához található a második rendszerben egy megfelelő pont. Figyelembe kell azonban venni, hogy két, négy-négy pontból álló, egymással projektiv rendszer mindig négy különböző módon felelhet meg egymásnak, azaz, ha a két rendszer (a, b, c, d) és $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$: akkor feltéve, hogy az első rendszer négy pontja (a, b, c, d), a második rendszer négy megfelelő pontja ebben a négy különböző sorrendben vehető $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\beta, \alpha, \delta, \gamma)$, $(\gamma, \delta, \alpha, \beta)$, $(\delta, \gamma, \beta, \alpha)$.

159. A megelőzőket nem kell úgy felfognunk, mintha kizárnók azt, hogy az (x, y) és az (x, y) koordinátás terek között vonatkozás állana fenn: ez a két tér nem csak egyforma lehet, hanem egy és ugyanazon tér, vagyis ugyanaz az egyenes is lehet; s a két rendszer pontjai egyforma pontok lehetnek; ennélfogva az (x, y) és az (x, y) koordináták ugyanahhoz a koordinátarendszerhez tartozhatnak, azaz az $(x, y = a, 1)$ és az (x, y $= a$, 1) ugyanazt a pontot jelölhetik.

160. Ha a két pontrendszer egynemű és ugyanabban az egyenesben van, akkor az első rendszernek általában két pontja van, a mely a második rendszer megfelelő pontjával összeesik; ezt a két pontot a projektivitás önönmagához konjugált pontjának mondjuk. Különös esetben a projektivitás két önönmagához konjugált pontja össze is eshetik.

161. Az involucziós rendszer két ugyanazon az egyenesen elhelyezett projektiv rendszernek példáját szolgáltatja; valóban, ha minden egyes pontpárból tetszés szerint kiválasztjuk az egyik pontot, az így nyert pontok oly rendszert alkotnak, a mely projektiv avval a rendszerrel, a melyet az egyes párok másik pontjai alkotnak; s ebben az esetben az involuczió önönmagukhoz konjugált pontjai a projektivitásnak is önönmagukhoz konjugált pontjai. Ekként, ha A és A', B és B', C és C', D és D' az involucziós rendszer párjai, akkor (A, B, C, D) és (A', B', C', D') projektiv pontrendszerek; speczialis esetként említjük, hogy (A, B, C, C') és (A', B', C', C) is projektiv pontrendszerek. Helyén való megjegyezni, hogy ha F az involucziónak önönmagához konjugált pontja, akkor (A, B, F, F) és (A', B', F, F) nem projektiv pontrendszerek, (a milyeneknek első pillantásra látszanak).

162. Képzeljük a pontoknak valamely involuczióját; vegyünk fel azon az egyenesen, a melyen a pontrendszer van, egy pontot, O-t és vegyük figyelembe azt a pontrendszert, a melyet az O-nak az involuczió egyes párjaira nézve harmonikus pontjai alkotnak; ugyanígy vegyünk fel ezen az egyenesen egy másik pontot, O'-t és vegyük figyelembe azt a pontrendszert, a melyet az O'-nek az involuczió egyes párjaira nézve harmonikus pontjai alkotnak; ez a két pontrendszer egymással projektiv rokonságban áll. (Lásd az ötödik értekezésem 111. pontját.)

163. Két involuczió projektiv rokonságban állhat egymással; valóban vegyünk fel azon az egyenesen, a melyen az első involuczió van, egy pontot, O-t és vegyük figyelembe azt a pontrendszert, a mely az O-nak az involuczió egyes párjaira nézve harmonikus pontjaiból áll; vegyünk fel ugyanígy azon az egyenesen, a melyen a második involuczió van, egy pontot, Q-t és vegyük figyelembe azt a pontrendszert, a mely a Q-nak az involuczió egyes párjaira nézve harmonikus pontjaiból áll; ha most a két pontrendszer projektiv rokonságban áll, akkor a két involucziót is projektiv rokonságban állónak mondjuk: a megelőző pont mutatja, hogy a rokonság természete semmi módon nem függ az O és Q pontok választásától. S nem szükséges az, hogy az egyenes és

pont szavaknak jelentése a két involuczióra nézve ugyanaz legyen. (Lásd ötödik értekezésemnek 111. pontját).

164. Valamely egyenesnek négy vagy több pontquadrupluma (a pontok négyes csoportja) projektiv rokonságban állhat egy másik egyenesnek ugyanannyi quadruplumával. Ez az eset akkor áll fenn, a midőn az első rendszer quadruplumainak anharmonikus viszonyai egyenlők a második rendszer quadruplumainak anharmonikus viszonyaival. Az nem lényeges, hogy a pontquadruplum három anharmonikus viszonya közül mindegyik rendszerben melyiket választjuk, feltéve, hogy az illető rendszer három másik quadruplumánál ugyanazt választjuk. A quadruplum pontjainak sorrendjére ügyelni kell, azonban van a quadruplum pontjainak összesen négy megengedhető permutácziója; ha ugyanis A, B, C, D a quadruplum pontjai, akkor (A, B, C, D), (B, A, D, C), (C, D, A, B), (D, C, B, A) ugyanannak a quadruplumnak tekinthetők. A második rendszerben bármily három quadruplum megfelelhet az első rendszer három quadruplumának; s akkor ha egy negyedik quadruplum van adva az első rendszerben, s a második rendszer megfelelő quadruplumának négy pontja közül három, e quadruplum hátralévő negyedik pontja meghatározható. Az egyenes és pont szavakat nem szükséges a quadruplumok két rendszerére nézve egyforma jelentéssel érteni. (Lásd ötödik értekezésemnek 112. pontját.)

165. A harmonikus vonatkozás megelőző elméletéből kitünik, hogy ha egy pontpárunk van:

$$(a, b, c\between x, y)^2 = 0,$$

akkor minden más pontpár egyenlete ily alakban fejezhető ki, még pedig két különböző módon

$$(a, b, c\between x, y)^2 + (lx + my)^2 = 0,$$

a hol a lineár függvény két lehetséges értékének megfelelő $(lx + my = 0)$ pontok a pontpárnak harmonikus pontjai, az adott $(a, b, c\between x, y)^2 = 0$ pontpárra nézve vagy a mi ugyanaz a két pontpár involucziójának önönmagukhoz konjugált pontjai. (Lásd ötödik értekezésem 105. pontját.) A szóban forgó egyenlettel képviselt pontpárnak magában véve nem kell semmiféle különös vonatkozásban állania az $(a, b, c \between x, y)^2=0$ pontpárral; de ha ekként állítjuk elő, azt mondjuk, hogy az adott pontpárba be van írva és az $lx+my=0$ pontot a beirás tengelyének nevezzük. Ennek a pontnak az adott pontpárra nézve harmonikus pontját (azaz, a két pontpár involucziójának másik önönmagához konjugált pontját) a beirás középpontjának nevezzük.*

166. Ha úgy tetszik, a beirt pontpár egyenletét ebben az alakban állíthatjuk elő, ha (x', y') és θ állandók

$$(a, b, c \between x, y)^2 (a, b, c \between x', y')^2 \sin^2 \theta-(ac-b)^2 (xy'-x'y)^2=0,$$

a miből a beirás tengelyére illetőleg a beirás középpontjára ezeket az egyenleteket kapjuk

$$\begin{aligned} xy'-x'y &= 0, \\ (a, b, c \between x, y \between x', y') &= 0\,; \end{aligned}$$

vagy pedig ebben az æquivalens alakban,

$$(a, b, c \between x, y)^2 (a, b, c \between x', y')^2 \cos^2 \theta - \{(a, b, c \between x, y \between x', y')\}^2=0,$$

a miből a beirás tengelyére illetőleg a beirás középpontjára ezeket az egyenleteket nyerjük

$$\begin{aligned} (a, b, c \between x, y \between x', y') &= 0, \\ xy'-x'y &= 0. \end{aligned}$$

167. A két alak æquivalentiája ettől az identikus egyenlettől függ

$$\begin{aligned} (a, b, c \between x, y)^2 (a, b, c \between x', y')^2-\{(a, b, c \between x, y \between x', y')\}^2 &= \\ =(ac-b^2)(xy'-x'y)^2, \end{aligned}$$

a mi valójában az ötödik értekezésem 95. pontjában említett egyenlet. Ha rövidség okáért így írjuk

* A beirt, beirás szavakat nem a körülirt, körülirás szavakkal ellentétben használjuk, hanem velök azonos értelemben s ugyanolyan módon, mint (a későbbi 203. és a reákövetkező pontokban) a kúpszeletekre nézve.

$$(a, b, c \between x, y)^2 \quad = 00,$$
$$(a, b, c \between x, y \between x', y') = 01 = 10, \text{ stb.},$$

akkor az egyenlet ily alakban írható

$$\begin{vmatrix} 00, & 01 \\ 10, & 11 \end{vmatrix} = (ac - b^2) \begin{vmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{vmatrix}^2.$$

168. Ugyanilyen egyenlet áll fenn három rendszerre, az (x, y), (x', y'), (x'', y'')-re; a jobb oldal itt eltünik, mert nincs elegendő oszlop, hogy velök determinánst alkossunk és az egyenlet lesz

$$\begin{vmatrix} 00, & 01, & 02 \\ 10, & 11, & 12 \\ 20, & 21, & 22 \end{vmatrix} = 0,$$

a mely egyenlet még így is írható

$$\cos^{-1} \frac{01}{\sqrt{00}\sqrt{11}} + \cos^{-1} \frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{22}} = \cos^{-1} \frac{02}{\sqrt{00}\sqrt{22}},^*$$

a mint az könnyen igazolható, ha az egyenletet algebrai alakra hozzuk. Az eddigiekben előadtuk a különböző képleteket, a melyek az egy-méretű geometriában a távolság fogalmának megállapításával állanak kapcsolatban; ennek az elméletnek kifejtését czélszerű lesz azonban későbbre halasztani és azt kapcsolatban a két-méretű geometriával megvitatni.

A két-méretű geometriáról, 169—208. pont.

169. A két-méretű geometriában számunkra a teret a sík képviseli; ez a hely (locus in quo), a melyet két különböző szempontból tekintünk, pontokból állónak vagy pedig egyenesekből állónak. A sík egyes pontjai a pontkoordinátákkal, (x, y, z)-vel vannak meghatározva, azaz ha ezeknek egy bizonyos értéket tulajdonítunk

---

* Az angol szerzők legtöbbje arc. cos. x jelölésére a $\cos^{-1} x$ jelet használja. A fordító megjegyzése.)

vagyis, ha $x, y, z = a, b, c$, akkor a síknak egy bizonyos pontját kapjuk; ugyanígy a sík egyes egyenesei a vonalkoordinátákkal, (ξ, η, ζ)-val vannak meghatározva, azaz ha ezeknek egy bizonyos értéket tulajdonítunk, vagyis ha $\xi, \eta, \zeta = \alpha, \beta, \gamma$, a síknak egy bizonyos egyenesét kapjuk. Azt mondhatjuk tehát, hogy a sík az (x, y, z) pontkoordinátáknak és a (ξ, η, ζ) vonalkoordinátáknak hordozója (sorozója) (locus in quo). A pontkoordinátáknak és a vonalkoordinátáknak analitikai elméletét nem szükséges külön tárgyalnunk; mert az előbbieknek elmélete pontokra illetve egyenesekre nézve azonos az utóbbiaknak elméletével egyenesekre illetve pontokra nézve; de meg kell mutatnunk azt, miként alkalmazható a koordinátáknak egyik rendszere, mondjuk a pontkoordinátarendszer, egyidejűleg pontokra és egyenesekre, s ki kell fejtenünk a kétféle koordinátarendszer közötti kölcsönös vonatkozást.

170. Tehát pontkoordinátákat véve figyelembe, az

$$x, y, z = a, b, c$$

egyenletek, mint már említve volt, pontot határoznak meg.

A lineár egyenlet

$$(*\between x, y, z)^1 = 0$$

egyenest határoz meg, még pedig azt az egyenest határozza meg, a mely ama pontoknak geometriai helye, a melyeknek koordinátái ezt az egyenletet kielégítik. Ugyanígy az

$$(*\between x, y, z)^m = 0$$

egyenlet m-edrendű görbét határoz meg, azaz azt a görbét, a mely geometriai helye azoknak a pontoknak, a melyeknek koordinátái ezt az egyenletet elégítik ki. Igy például a másodfokú egyenlet

$$(*\between x, y, z)^2 = 0$$

kúpszeletet határoz meg.

171. Ha valamely alak raczionális tényezőkre bomlik, akkor a görbe egyenlete ki van elégítve, ha e tényezők valamelyikét teszszük egyenlővé zérussal, vagyis ekkor a görbe alacsonyabb rendű görbékre bomlik fel, s az egész görbe rendszáma egyenlő a kompo-

nens görbék rendszámainak összegével. Különös esetben bármily rendű görbe egyenesek rendszerére bomolhatik szét, s akkor ez egyenesek száma a görbe rendszámával egyenlő; közülök két vagy több egyenes össze is eshetik. Oly görbét, a mely alacsonyabbrendű görbékre szét nem bomlik, valódi görbének nevezünk.

172. Visszatérve a lineár egyenletre, ha az együtthatókat kiírjuk, az egyenlet

$$(\xi, \eta, \zeta)(x, y, z) = 0$$

vagy a mi ugyanaz

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0;$$

s definiczióként azt mondjuk, hogy ennek az egyenesnek koordinátái (vonalkoordinátái) (ξ, η, ζ).

173. De ugyanaz az egyenlet pontnak egyenlete, ha (x, y, z)-t állandó együtthatóknak tekintjük és (ξ, η, ζ)-t vonalkoordinátáknak, azaz azé a ponté, a mely mindama pontok geometriai helye (burkolója), a melyeknek koordinátái a szóban forgó egyenletet kielégítik; s ez a pont épen az, a melynek (x, y, z) a koordinátái (pontkoordinátái). Mert valóban, ha (ξ, η, ζ)-t változó parametereknek tekintjük, a melyeket a $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ egyenlet egymással összekapcsol, akkor (X, Y, Z)-t folyó pontkoordinátáknak véve, a $\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0$ egyenlet ki van elégítve, ha (X, Y, Z) helyébe (x, y, z)-t írunk; vagyis az egyes egyenesek, a melyeknek (ξ, η, ζ) a koordinátái, mindannyian átmennek az (x, y, z) ponton.

174. Összefoglalva tehát a

$$(\xi, \eta, \zeta)(x, y, z) = 0,$$

vagy a

$$\xi x + \eta y + \zeta z \quad = 0$$

egyenlet, ha (x, y, z)-t folyó pontkoordinátáknak tekintjük és (ξ, η, ζ)-t állandó együtthatóknak oly egyenesnek egyenlete, a melynek koordinátái (vonalkoordinátái) (ξ, η, ζ); s ugyanaz az egyenlet, ha (ξ, η, ζ)-t folyó vonalkoordinátáknak tekintjük és (x, y, z)-t állandó együtthatóknak, egy pontnak egyenlete, a melynek koordinátái (pontkoordinátái) (x, y, z).

175. Az (a, b, c) pont kifejezés azt a pontot jelenti, a melynek pontkoordinátái (a, b, c); ugyanígy az (α, β, γ) egyenes kifejezés

azt az egyenest jelenti, a melynek vonalkoordinátái (α, β, γ). Az utóbbi kifejezés akkor is használható, a midőn pontkoordinátákkal dolgozunk, a nélkül, hogy ezzel hibát követnénk el, vagy hogy kétértelműségtől tartanunk kellene; természetes azonban, hogy mindig szabadságunkban van a definiczió helyébe magát a megjelölt dolgot helyettesiteni, s ez gyakran jobb is; tehát azt mondjuk, az az egyenes, a melynek egyenlete $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, vagy még rövidebben az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ egyenes. Helyénvaló lesz ezt így tenni a következő pontokban, a 176-tól a 184-ig, a melyek néhány a pont és az egyenes elméletéhez tartozó képletet tartalmaznak pontkoordinátákban.

176. Annak a feltétele, hogy az (a, b, c) pont az

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

egyenesen feküdjék, tehát ez:

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0.$$

177. Az (a, b, c), (a', b', c') pontokon átmenő egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{vmatrix} = 0;$$

s ha ebben az egyenletben az (a', b', c')-t határozatlannak tekintjük, akkor olyan egyenes egyenletét nyerjük, mely annak az egy feltételnek van alávetve, hogy az (a, b, c) ponton kell átmennie. Az egyenlet látszólag két tetszőleges parametert tartalmaz, de valójában ezek egyetlen egyre redukálódnak.

178. Az

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$
$$\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=0$$

egyenesek metszéspontjának koordinátáit ezek az egyenletek adják

$$x, y, z=\beta\gamma'-\beta'\gamma, \quad \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, \quad \alpha\beta'-\alpha'\beta;$$

s ha ezekben az egyenletekben az α', β', γ'-t határozatlanoknak tekintjük, akkor a pont koordinátáit annak az egy feltételnek vetettük alá, hogy az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ egyenesen legyenek; az eredmény úgy, mint az előbbi esetben látszólag két tetszőleges parametert tartalmaz, azonban valójában ezek egyetlen egyre redukálódnak.

179. Annak a feltétele, hogy az (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') pontok egy egyenesen feküdjenek

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

a mi ezekkel az egyenletekkel is kifejezhető:

$$a'', b'', c'' = \lambda a+\mu a', \quad \lambda b+\mu b', \quad \lambda c+\mu c',$$

a hol λ, μ tetszőleges szorzók; ezek az egyenletek ennélfogva egy határozatlan pont koordinátáit adják az (a, b, c) és az $(a', b' c')$ pontokat összekötő egyenesen.

180. Annak a feltétele, hogy az

$$\begin{aligned} \alpha x &+\beta y &+\gamma z &=0 \\ \alpha' x &+\beta' y &+\gamma' z &=0 \\ \alpha'' x &+\beta'' y &+\gamma'' z &=0 \end{aligned}$$

egyenesek egy ponton menjenek át

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

és ez a reláczió ezekkel az egyenletekkel is kifejezhető:

$$\alpha'', \beta'', \gamma'' = l\alpha+m\alpha', \quad l\beta+m\beta', \quad l\gamma+m\gamma',$$

a hol l, m tetszőleges szorzók; ezeket az értékeket az $\alpha''x+\beta''y+$ $+\gamma''z=0$ egyenletbe belehelyettesítvén, az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ és az $\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=0$ egyenesek metszéspontján átmenő egyenes egyenlete gyanánt nyerjük

$$l(\alpha x+\beta y+\gamma z)+m(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)=0,$$

a mely egyszerre adódik ki abból a meggondolásból, hogy azok az (x, y, z) értékek, a melyek az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ és az $\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=0$ egyenletet egyidejűleg kielégitik, a szóban forgó egyenletet is kielégitik.

181. Az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ és az $\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=0$ egyenesek metszéspontján és az (a, b, c) ponton átmenő egyenes egyenlete, mint belátható

$$\begin{vmatrix} \alpha x+\beta y+\gamma z, & \alpha' x+\beta' y+\gamma' z \\ \alpha a+\beta b+\gamma c, & \alpha' a+\beta' b+\gamma' c \end{vmatrix} = 0,$$

ez vagy a vele æquivalens alak

$$\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\alpha a+\beta b+\gamma c} = \frac{\alpha' x+\beta' y+\gamma' z}{\alpha' a+\beta' b+\gamma' c}$$

a használatra a legalkalmasabb; figyelembe veendő azonban, hogy az egyenlet így is irható

$$\begin{vmatrix} x & , & y & , & z \\ a & , & b & , & c \\ \beta\gamma'-\beta'\gamma, & & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha, & & \alpha\beta'-\alpha'\beta \end{vmatrix} = 0,$$

és így

$$\begin{vmatrix} bz-cy, & cx-az, & ay-bx \\ \alpha & , \beta & , \gamma \\ \alpha' & , \beta' & , \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

vagy pedig ebben az alakban

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')(bz-cy)+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(cx-az)+(\alpha\beta'-\beta\alpha')(ay-bx) = 0,$$

a mit ez is képviselhet még

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ a, & b, & c \end{vmatrix} = 0.$$

182. Ha ki akarjuk számitani az (a, b, c) és (a', b', c') pontot összekötő egyenesnek az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ egyenessel való metszéspontjának koordinátáit, akkor azt találjuk, hogy

$$x, y, z = \lambda a+\mu a', \quad \lambda b+\mu b', \quad \lambda c+\mu c',$$

a hol λ, μ-t az

$$\lambda(a\alpha+\beta b+\gamma c)+\mu(\alpha a'+\beta b'+\gamma c')=0$$

egyenlet határozza meg. A megelőzőek majdnem állandóan előforduló elemi képletek; hasznos lehet, ha még a következő képleteket hozzájuk fűzzük.

183. Keresendő az

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=0, \quad \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=0$$

egyenesek metszéspontján és az

$$\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 z=0, \quad \alpha_4 x+\beta_4 y+\gamma_4 z=0$$

egyenesek metszéspontján átmenő egyenes egyenlete.

Rövidség okáért írjuk $u_1=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z$, stb.; akkor az

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \end{vmatrix}=0$$

egyenlet azonosan áll fenn és ennélfogva ez a két egyenlet

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & \cdot\,, & \cdot \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} \cdot\,, & \cdot\,, & u_3, & u_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \end{vmatrix}=0$$

egymással æquivalens; mind a kettő a keresett egyenest képviseli. Könnyű még levezetni ezt az alakot is:

$$x\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdot\,, & \cdot \\ \cdot\,, & \cdot\,, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \cdot\,, & \cdot \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \cdot\,, & \cdot\,, & \beta_3, & \beta_4 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \end{vmatrix}+$$

$$+z\begin{vmatrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \cdot\,, & \cdot \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \cdot\,, & \cdot\,, & \gamma_3, & \gamma_4 \end{vmatrix}=0.$$

184. Annak a feltétele, hogy az $u_1=0$, $u_2=0$ egyeneseknek, az $u_3=0$, $u_4=0$ és az $u_5=0$, $u_6=0$ egyeneseknek metszéspontjai ugyanabban az egyenesben feküdjenek, a hol mint az imént u_1 $\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z$-t jelenti stb.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & ., & . \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4, & ., & . \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4, & ., & . \\ ., & ., & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, & \alpha_6 \\ ., & ., & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, & \beta_6 \\ ., & ., & \gamma_3, & \gamma_4, & \gamma_5, & \gamma_6 \end{vmatrix} = 0,$$

a mi valóban szimmetrikus a hat rendszerre nézve. Az utóbbi formulát én közöltem, a *Cambridge Mathematical Journal*, IV. k. (1849), 18. l. [9].

185. A görbe pontja elnevezés helyett, alkalmas lesz ezt használni a görbe «ineuns»-a (ineunt of the curve).

A görbe két szomszédos pontján átmenő egyenes érintő az illető pontban. Két szomszédos érintő metszéspontja az érintési pont.

A görbe egyenlete pontkoordinátákban, vagy mint nevezhető a görbe pontegyenlete, az a reláczió, a mely a görbe bármely pontjának pontkoordinátái között fennáll.

A görbe egyenlete vonalkoordinátákban, vagy a görbe vonalegyenlete az a reláczió, a mely a görbe bármely érintőjének vonalkoordinátái között fennáll.

186. Említettem, hogy a görbe annyiadrendű a hányadfokú a pontegyenlete: ugyanígy a görbe annyiadosztályú, a hányadfokú a vonalegyenlete; s épen úgy, a mint a görbe, ha pontegyenletével van képviselve oly görbékre bomolhatik fel, a melyek rendjeinek összege az egész görbe rendjével egyenlő, vonalegyenletével képviselve oly görbékre bomolhatik fel, a melyek osztályainak összege az egész görbe osztályával egyenlő. Különös esetként a görbe pontok rendszerére bomolhatik, a melyben a pontok száma a görbe osztályával egyenlő és közülök két vagy több pont összeeshetik.

187. Az egyenes elsőrendű és zérusadosztályú görbe; a pont

zérusodrendű és elsőosztályú görbe. A valódi kúpszelet másodrendű és másodosztályú görbe; de ha a kúpszelet egyenespárrá fajul, az osztály zérusra sülyed; s ha a kúpszelet pontpárrá fajul, a rendszám sülyed zérusra. Megjegyzendő, hogy a pont vagy a pontrendszer nem jellemezhető egyenlettel pontkoordinátákban, sem pedig az egyenes vagy egyenesrendszer egyenlettel vonalkoordinátákban. Általában azt mondhatjuk, hogy a görbe pontgörbe is és vonalgörbe is; de a pont vagy a pontrendszer csak vonalgörbe és az egyenes vagy az egyenesrendszer csak pontgörbe.

188. Két görbe metszéspontjai (közös pontjai) ama pontok, a melyeknek koordinátái a két görbe pontegyenletét egyidejűleg elégítik ki. A közös pontok száma tehát a két görbe rendjének szorzatával egyenlő; abban a különös esetben, a mikor a görbék egyike egyenes, a metszéspontok (közös pontok) száma a görbe rendjével egyenlő. Ugyanígy két görbe közös érintői amaz egyenesek, a melyeknek koordinátái a két görbe vonalegyenletét egyidejűleg elégítik ki. A közös érintők száma tehát a két görbe osztályának szorzatával egyenlő; s abban a különös esetben, a mikor a görbék egyike egy pont, a közös érintők (a görbéhez a ponton keresztül húzható érintők) száma a görbe osztályával egyenlő. Mivel az érintő két szomszédos ponton átmenő egyenes, ezért a görbét, feltéve, hogy ez m-edrendű, még $(m-2)$ pontban metszi; ugyanígy egy n-edosztályú görbe bármely pontjából $(n-2)$ érintőt húzhatunk a görbéhez.

189. Az (x', y', z') és (x'', y'', z'') pontokon átmenő egyenes pontegyenlete, mint már felírtuk

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Tegyük fel, hogy (x, y, z) az $U=0$ görbe egyik pontjának koordinátái, a szomszédos pont koordinátái ezek lesznek $(x+dx, y+dy, z+dz)$ és az e két pontot összekötő egyenes a görbének érintője lesz az (x, y, z) pontban. Vegyük $(X, Y. Z)$-t folyó pontkoordinátákul, s akkor az érintő egyenlete

$$\begin{vmatrix} X\ , & Y\ , & Z \\ x\ , & y\ , & z \\ x+dx, & y+dy, & z+dz \end{vmatrix} = 0,$$

vagy a mi ugyanaz

$$X(ydz-zdy)+Y(zdx-xdz)+Z(xdy-ydx)=0.$$

De mivel U homogén függvénye az (x, y, z)-nek, ezt kapjuk

$$x\partial_x U+y\partial_y U+z\partial_z U=mU=0\,;$$

és mivel $(x+dx, y+dy, z+dz)$ a görbének pontja

$$dx\partial_x U+dy\partial_y U+dz\partial_z U=0\,;$$

ebből a két egyenletből

$$ydz-zdy : zdx-xdz : xdy-ydx=\partial_x U : \partial_y U : \partial_z U,$$

s ennélfogva az érintő egyenlete

$$X\partial_x U+Y\partial_y U+Z\partial_z U=0.$$

190. Vegyük (ξ, η, ζ)-t az érintő vonalkoordinátáinak, akkor az érintő egyenlete

$$\xi X+\eta Y+\zeta Z=0\,;$$

a két egyenletet összehasonlítván, nyerjük

$$\xi : \eta : \zeta=\partial_x U : \partial_y U : \partial_z U\,;$$

és ha ezekből az egyenletekből meg az $U=0$ egyenletből (a görbe pontegyenletéből) az (x, y, z)-t kiküszöböljük, egyenletet kapunk a (ξ, η, ζ) között, a mely a görbének vonalegyenlete. Ha úgy tetszik, a rendszert ebben az alakban állíthatjuk elő

$$\begin{aligned} &\partial_x U+\lambda\xi=0, \\ &\partial_y U+\lambda\eta=0, \\ &\partial_z U+\lambda\zeta=0, \\ &U \quad\ \ =0, \end{aligned}$$

vagy a mi jóval egyszerűbb, ebben az alakban

$$\partial_x U+\lambda\xi=0,$$
$$\partial_y U+\lambda\eta=0,$$
$$\partial_z U+\lambda\zeta=0,$$
$$\xi x+\eta y+\zeta z=0$$

és az egyik rendszerből kiküszöböljük x, y, z-t és λ-t.

191. Ha valamely kúpszelet pontegyenlete

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2=0,$$

akkor a vonalegyenlete

$$-\begin{vmatrix} & \xi, & \eta, & \zeta \\ \xi & a, & h, & g \\ \eta & h, & b, & f \\ \zeta & g, & f, & c \end{vmatrix}=0,$$

vagy ha a következő jelöléseket használjuk:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= bc-f^2, \\ \mathfrak{B} &= ca-g^2, \\ \mathfrak{C} &= ab-h^2, \\ \mathfrak{F} &= gh-af, \\ \mathfrak{G} &= hf-bg, \\ \mathfrak{H} &= fg-ch, \end{aligned}$$

és a rendszer kiegészítéséül

$$K=abc-af^2-bg^2-ch^2+2fgh,$$

akkor a kúpszelet vonalegyenlete

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \xi, \eta, \zeta)^2=0.$$

192. Az $\mathfrak{A}$ és a többi mennyiségek kielégítik ezeket a relácziókat

$$K^2=\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{F}^2-\mathfrak{B}\mathfrak{G}^2-\mathfrak{C}\mathfrak{H}^2+2\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H},$$

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}a+\mathfrak{H}h+\mathfrak{G}g=K, & \mathfrak{H}a+\mathfrak{B}h+\mathfrak{F}g=0, & \mathfrak{G}a+\mathfrak{F}h+\mathfrak{C}g=0, \\ \mathfrak{A}h+\mathfrak{H}b+\mathfrak{G}f=0, & \mathfrak{H}h+\mathfrak{B}b+\mathfrak{F}f=K, & \mathfrak{G}h+\mathfrak{F}b+\mathfrak{C}f=0, \\ \mathfrak{A}g+\mathfrak{H}f+\mathfrak{G}c=0, & \mathfrak{H}g+\mathfrak{B}f+\mathfrak{F}c=0, & \mathfrak{G}g+\mathfrak{F}f+\mathfrak{C}c=K, \end{array}$$

továbbá

$$Ka=\mathfrak{B}\mathfrak{C}-\mathfrak{F}^2, \quad Kf=\mathfrak{G}\mathfrak{H}-\mathfrak{A}\mathfrak{F},$$
$$Kb=\mathfrak{C}\mathfrak{A}-\mathfrak{G}^2, \quad Kg=\mathfrak{H}\mathfrak{F}-\mathfrak{B}\mathfrak{G},$$
$$Kc=\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{H}^2, \quad Kh=\mathfrak{F}\mathfrak{G}-\mathfrak{C}\mathfrak{H}.$$

193. Egy ugyanazon egyenesen fekvő pontok rendszerét pontsornak nevezzük; egy ugyanazon ponton átmenő egyenesek rendszerét sugársornak nevezzük. A pontsorok és sugársorok elmélete, ha őket egymásra való tekintet nélkül vizsgáljuk, valójában csak egy elméletet ad, a mely az egy-méretű geometriát alkotja. Láttuk, hogy az egy-méretű geometriában miképen állhat a pontsor és a sugársor egymással bizonyos vonatkozásban, noha külön terekben levőknek tekintjük őket (a minthogy úgy is kell tekinteni őket). A két-méretű geometriában a pontsor és a sugársor természetesen együtt lehetnek ugyanazon a sikon, mint közös hordozójukon (sorozójukon) (locus in quo); s ilyen együttlét a valóságban igen gyakran fordul elő: így ha van egy egyenes és egy pont, s ha egyeneseket rajzolunk, a melyek a pontot az egyenes egyes pontjaival összekötik, ezek az egyenesek egy sugársort alkotnak, az egyenes pontjai pedig pontsort, az ilyen sugársor és pontsor egymással projektiv rokonságban van.

194. A projektivitás elméletét a két-méretű geometriában a megfelelő egy-méretű geometriai elmélettől, vagy a mi ugyanaz, a pontsorok vagy sugársorok projektivitásától lehet függővé tenni. Vegyünk ugyanis figyelembe olyan két alakzatot, a mely külön sikban vagy két-méretű térben van; a második alakzatnak bármely négy (nem egy egyenesben fekvő) pontja megfelelhet az első alakzat bármely négy (nem egy egyenesben fekvő) pontjának; s ha ez így van, akkor az első alakzat bármely más adott pontjához az alább kifejtendő eljárással megszerkeszthetjük a második alakzat megfelelő pontját; s a két alakzat ekkor, a definiczió szerint, projektiv rokonságban van. Tegyük fel, hogy a második alakzat A', B', C', D' pontjai rendben megfelelnek az első alakzat A, B, C, D pontjainak, s legyen E az első alakzat bármely más pontja; tegyük fel, hogy a második alakzatnak megfelelő pontja E'; az AB, AC, AD, AE és az $A'B', A'C', A'D', A'E'$ sugársor egymás-

sal projektiv rokonságban áll, azaz E'-nek egy az A'-n átmenő adott egyenesen kell feküdnie; ugyanígy a BA, BC, BD, BE és a $B'A'$, $B'C'$, $B'D'$, $B'E'$ sugársor is projektiv rokonságban lesz egymással, azaz E'-nek egy a B'-n átmenő adott egyenesen kell feküdnie. S akkor fennáll az a tétel, hogy a CA, CB, CD, CE és a $C'A'$, $C'B'$, $C'D'$, $C'E'$, vagy a DA, DB, DC, DE és a $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$, $D'E'$ projektiv sugársorok lesznek, azaz a szerkesztés meghatározott lesz bármely kettőt választjuk is A-nak és B-nek a négy pont közül. A megelőző szerkesztés egy analitikai relláczióra vezet, a mely, úgy gondolom, az elméletnek jobban szolgál alapul. Tekintsük az első síkot az (x, y, z) koordináták hordozójának, s a második síkot az (X, Y, Z) koordináták hordozójának akként, hogy a két koordináta-rendszer egymástól teljesen független. Tekintsük az első síknak egy pontját és a második síknak megfelelő pontját úgy, hogy ennek (X, Y, Z) koordinátái az első síkon fekvő pont (x, y, z) koordinátáinak adott lineár függvényei. Bármily alakzat az első síkon egy megfelelő alakzatot hoz létre a második síkon, s a két alakzatot egymással projektivnek mondjuk. Az első alakzat egy pontjának a második alakzatban ismét egy pont felel meg, egyenesének ismét egyenes, pontsornak vagy sugársornak projektiv pontsor vagy sugársor, a mely utóbbi esetben az az egyenes vagy pont, a mely a pontsornak vagy a sugársornak sorozója az egyik alakzatban, annak az egyenesnek vagy pontnak felel meg, a mely a pontsornak vagy sugársornak sorozója a másik alakzatban. Általában az első alakzatban lévő bármilyen rendű és osztályú görbének, s a pontjainak és érintőinek a második alakzatban ugyanolyan rendű és osztályú görbe, s ennek pontjai és tangensei felelnek meg.

195. Itt még megjegyzendő, hogy semmiképen nem szükséges, hogy a sík szónak, vagy a pont és egyenes szavaknak s ebből folyólag a rend és osztály szavaknak ugyanaz legyen a jelentésük a két alakzatra nézve. A projektivitás elmélete, úgy a mint mi azt kifejtettük, magában tartalmazza azt, a mit közönségesen a collineatio elméletének neveznek és a reciprocitás elméletét is.

196. A sík szónak legyen meg a rendes jelentése a két alakzatra

nézve; s tegyük fel először, hogy a pont és egyenes szavaknak, s ennélfogva a rend és osztály szavaknak jelentése a két alakzatra nézve a rendes; itt a collineatio közönséges elméletét kapjuk, a melyben bármely pontsornak vagy sugársornak az első alakzatban projektiv pontsor vagy sugársor felel meg a másik alakzatban, s az első alakzatban levő bármily rendű és osztályú görbének ugyanolyan rendű és osztályú görbe felel meg a második alakzatban.

197. Különös esetként, a mely további fejtegetésekre ad alkalmat, felvehetjük, hogy a két alakzat egy és ugyanazon a sikon van. Ekkor általában van itt oly háromszög, a melynek szögpontjai és oldalai, az első alakzathoz tartozó pontnak vagy egyenesnek tekintve önönmaguknak felelnek meg, ha őket ekkor a második alakzathoz tartozó pontoknak vagy egyeneseknek tekintjük: ezt a háromszöget az önönmagához konjugált háromszögnek nevezzük. A síknak bármely pontja, az első alakzatba tartozónak tekintve, a sík bármely más pontjának felelhet meg, ha ezt a második alakzatba tartozónak tekintjük, s a második alakzat teljesen megszerkeszthető az önönmagához konjugált háromszög és egy ily megfelelő pontpár segítségével. Bizonyos specziális esetekben az önönmagához konjugált háromszög teljesen vagy részben határozatlanná válik; így ha a két alak egymással azonos, a síknak minden egyes pontja, az első alakzatba tartozónak tekintve, önönmagával esik össze, ha a második alakzatba tartozónak tekintjük. A collineatió elméletének további fejtegetését azonban más alkalomra tartom fenn.

198. Tegyük fel másodszor, hogy a megelőző általános elméletben az első alakzatra nézve a pont és az egyenes szavak, s ennélfogva a rend és az osztály szavak pontot és egyenest, rendet és osztályt jelentenek; a második alakzatra nézve azonban a pont és az egyenes szavak *egyenest* és *pontot* jelentenek, s ennélfogva a rend és az osztály szavak *osztályt* és *rendet.* Ebben az esetben a reciproczitás közönséges elméletét nyerjük, azaz itt, ha az összes szavakat a két alakzatra nézve egyenlő értelemben használjuk, az első alakzatban levő pontnak egyenes felel meg a második alak-

zatban; az egyenesnek pont; pontsornak vagy sugársornak sugársor vagy pontsor; bármilyen rendű és osztályú görbének, s e görbe pontjainak és érintőinek ugyanolyan osztályú és rendű görbe, s e görbe érintői és pontjai felelnek meg.

199. Különös esetként, a mely további fejtegetésekre ad alkalmat, vegyük fel, hogy a két alakzat ugyanabban a síkban van. Ebben az esetben azok a pontok, a melyek őket akár az első akár a második alakzatba tartozóknak tekintvén, a nekik a második illetőleg első alakzatban megfelelő egyeneseken feküsznek, egy kúpszeletet keletkeztetnek, a mely pólus-kúpszeletnek nevezhető; s azok az egyenesek, a melyek, ha őket akár az első akár a második alakzatba tartozóknak tekintjük, a második vagy első alakzatban nekik megfelelő pontokon mennek át, egy kúpszeletet burkolnak be, a mely polár-kúpszeletnek nevezhető; s ez a két kúpszelet kettős érintésben van egymással. E tárgy bővebb vizsgálatát más alkalomra hagyom; megjegyzem azonban, hogy abban a speciális esetben, a midőn a két kúpszelet összeesik, a kúpszeletre vonatkozó pólusok és polárisok közönséges elméletét kapjuk; ez az elmélet egy más szempontból a harmonikus vonatkozásból eredőnek tekinthető, s róla itt szólnunk kell.

200. Vegyünk figyelembe egy kúpszeletet és egy pontot, bármely a ponton keresztülmenő egyenes a kúpszeletet két pontban metszi, s az adott pontnak erre a két pontra nézve harmonikus pontjai egy egyenesen feküsznek, a mely az adott pontnak polárisa. A poláris átmegy az adott ponton át a kúpszelethez húzott érintők érintési pontjain.

Ugyanígy, ha a kúpszeletet és egy egyenest veszünk figyelembe, az egyenes bármely pontjából két érintőt húzhatunk a kúpszelethez és az adott egyenesnek a két érintőre nézve harmonikus sugara egy pontot burkol be, a mely az adott egyenes pólusa. A pólus a kúpszelethez az adott egyenessel való metszéspontjaiban húzott érintők metszéspontja.

Az egyenes egyes pontjainak polárisai pontot burkolnak be, a mely az egyenesnek pólusa; s egy ponton átmenő egyenesek pólusai egyenest származtatnak, a mely a pontnak polárisa; ez a tétel mutatja, hogyan lesz a pólusok és polárisok elméletéből egy speciális reciprocitás elmélete.

201. Ha a kúpszelet pontegyenlete

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2=0,$$

akkor az (x', y', z') pont polárisának, e kúpszeletre nézve, ez a pontegyenlete

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z \between x', y', z')=0.$$

Láttuk azonban, hogy úgyanennek a kúpszeletnek vonalegyenlete

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \xi, \eta, \zeta)^2=0,$$

tehát a (ξ', η', ζ') egyenes (azaz, azon egyenes, a melynek pontegyenlete $\xi'x+\eta'y+\zeta'z=0$) pólusának vonalegyenlete erre a kúpszeletre nézve

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \xi, \eta, \zeta \between \xi', \eta', \zeta')=0,$$

más szavakban, a pólus pontkoordinátái

$$\mathfrak{A}\xi'+\mathfrak{H}\eta'+\mathfrak{G}\zeta', \quad \mathfrak{H}\xi'+\mathfrak{B}\eta'+\mathfrak{F}\zeta', \quad \mathfrak{G}\xi'+\mathfrak{F}\eta'+\mathfrak{C}\zeta'.$$

202. Ha $U=0$, $V=0$ két egyenlő rendű görbe pontegyenlete, akkor ha λ, μ tetszőleges együtthatók

$$\lambda U+\mu V=0$$

egy ugyanolyan rendű görbe egyenlete, a mely a két görbe metszéspontjain (közös pontjain) átmegy; az ily görbét az adott görbékkel involuczióban levőnek mondjuk. Az involuczió általános elméletének kifejtését más alkalomra hagyom.

203. Abban a különös esetben, a mikor $U=0$ kúpszelet egyenlete és $P=0$, $Q=0$ két egyenes egyenlete,

$$U+\lambda PQ=0$$

olyan kúpszeletnek egyenlete, a mely a kúpszeletnek a két egyenessel való metszéspontjain megy át; ha a két egyenes összeesik, akkor

$$U+\lambda P^2=0$$

oly kúpszeletnek az egyenlete, a mely az $U=0$ kúpszeletet két pontban, a $P=0$ egyenessel való metszéspontjaiban érinti. Az ily kúpszeletet az $U=0$ kúpszeletbe beirt kúpszeletnek mondjuk; a $P=0$ egyenes a beirás tengelye; ezen egyenesnek a két kúpszeletre nézve ugyanaz a pólusa van, s ezt a pólusát a beirás középpontjának nevezzük: a két kúpszelet vonatkozása teljesen le van irva avval, hogy a négy közös pontjuk a beirás tengelyén fekszik és közülök kettő-kettő összeesik, továbbá, hogy a négy közös érintőjük a beirás középpontján megy át, s közülök kettő-kettő összeesik; ennélfogva hasonló vonatkozás áll fenn a pontokra illetőleg az érintőkre nézve és *a priori* kell következtetnünk, hogy ha $\Upsilon=0$ az $U=0$ kúpszelet vonalegyenlete és $\Pi=0$ a beirás középpontjának a vonalegyenlete, akkor a beirt kúpszelet vonalegyenlete $\Upsilon+\mu\Pi^2=0$.

204. Ennek igazolására megjegyzem, hogy ha a beirás tengelyének egyenlete

$$\xi' x+\eta' y+\zeta' z=0,$$

akkor a beirás középpontjának vonalegyenlete (előbbi 201. pont szerint)

$$\Pi=(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')=0.$$

A beirt kúpszelet vonalegyenletét legelőször is ily alakban kapjuk

$$(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2+\lambda(a, \ldots)(\eta\zeta'-\eta'\zeta,\ \zeta\xi'-\zeta'\xi,\ \xi\eta'-\xi'\eta)^2=0;$$

De minthogy

$$(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2-\{(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')\}^2=$$
$$=K(a, \ldots)(\eta\zeta'-\eta'\zeta,\ \zeta\xi'-\zeta'\xi,\ \xi\eta'-\xi'\eta)^2$$

azonosan áll fenn, lesz

$$[K+\lambda(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2](\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2-$$
$$-\lambda\{(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')(\xi, \eta, \zeta)\}^2=0,$$

a mi épen olyan alakú, mint a minőt keresünk.

205. Vegyük (x', y', z')-t a beirás középpontjának pontkoordinátáiul, akkor a beirás tengelyének egyenlete

$$(a, b, c, f, g, h\between x, y, z\between x', y', z') = 0;$$

s ha úgy tetszik a beírt kúpszelet egyenletét ebben az alakban fejezhetjük ki:

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z)^2 \cos^2 \theta - \\ - \{(a, \ldots \between x, y, z\between x', y', z')\}^2 = 0,$$

a hol θ állandó. Ez az egyenlet még így írható

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z')^2 \sin^2 \theta - \\ - (\mathfrak{A}, \ldots \between yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y)^2 = 0,$$

a mely két alak az

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z')^2 - \{(a, \ldots \between x', y', z'\between x, y, z)\}^2 = \\ = (\mathfrak{A}, \ldots \between yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y)^2$$

azonos egyenlet következtében egyenlő értékű.

206. A beírás tengelyének vonalkoordinátái (ξ', η', ζ') a következők:

$$ax' + hy' + gz', \quad hx' + by' + fz', \quad gx' + fy' + cz',$$

s belőlük ezt a relácziót vezetjük le

$$(\mathfrak{A}, \ldots \between \xi', \eta', \zeta')^2 = K(a, \ldots \between x', y', z')^2.$$

De minthogy az

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z')^2 \cos^2 \theta - \\ - \{(a, \ldots \between x', y', z'\between x, y, z)\}^2 = 0$$

alakú egyenlet az eredetileg felállított

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 + \lambda (\xi' x + \eta' y + \zeta' z)^2,$$

vagy a mi ugyanaz

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 + \lambda \{(a, \ldots \between x, y, z\between x', y', z')\}^2 = 0$$

alakú egyenlettel megegyezővé tehető, kell hogy

$$\lambda = \frac{-1}{(a, \ldots \between x', y', z')^2 \cos^2 \theta},$$

legyen, a mi így is írható

$$\lambda = \frac{-K}{(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \cos^2\theta}$$

vagy a mi ugyanaz

$$K + \lambda(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2 - \lambda(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \sin^2\theta = 0;$$

és innen egy előbbi képlet segítségével megkapjuk a beírt kúpszelet vonalegyenletét tudni illik:

207. Mivel a pontegyenlet

$$(a, \ldots)(x, y, z)^2 (a, \ldots)(x', y', z')^2 \cos^2\theta -$$
$$-\{(a, \ldots)(x, y, z)(x', y', z')\}^2 = 0$$

vagy

$$(a, \ldots)(x, y, z)^2 (a, \ldots)(x', y', z')^2 \sin^2\theta -$$
$$-(\mathfrak{A}, \ldots)(yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y)^2 = 0,$$

æquivalens azért, mert

$$(a, \ldots)(x, y, z)^2 (a, \ldots)(x', y', z')^2 - \{(a, \ldots)(x, y, z)(x', y', z')\}^2 =$$
$$= (\mathfrak{A}, \ldots)(yz' - y'z, \quad zx' - z'x, \quad xy' - x'y)^2;$$

tehát a vonalegyenlet megfelelő alakjai

$$(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \sin^2\theta -$$
$$-\{(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')\}^2 = 0,$$

és

$$(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2 \cos^2\theta -$$
$$-K(a, \ldots)(\eta\zeta' - \eta'\zeta, \quad \zeta\xi' - \zeta'\xi, \quad \xi\eta' - \xi'\eta)^2 = 0,$$

az imént említett ezen identitás értelmében egymással æquivalensek,

$$(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)^2 (\mathfrak{A}, \ldots)(\xi', \eta', \zeta')^2 - \{(\mathfrak{A}, \ldots)(\xi, \eta, \zeta)(\xi', \eta', \zeta')\}^2 =$$
$$= K(a, \ldots)(\eta\zeta' - \eta'\zeta, \quad \zeta\xi' - \zeta'\xi, \quad \xi\eta' - \xi'\eta)^2.$$

208. Irjuk rövidség okáért

$$(a, \ldots)(x, y, z)^2 \qquad = 00,$$
$$(a, \ldots)(x, y, z)(x', y', z') = 01 = 10, \text{ stb.},$$

akkor az

$$\begin{vmatrix} 00, & 01, & 02 \\ 10, & 11, & 12 \\ 20, & 21, & 22 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix}^2$$

egyenlöség azonosan áll fenn és ha a jobboldali determináns eltűnik, azaz ha (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') egy egyenesnek pontjai, akkor a

$$\begin{vmatrix} 00, & 01, & 02 \\ 10, & 11, & 12 \\ 20, & 21, & 22 \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet nyerjük, a mely mint már emlitettük, æquivalens evvel

$$\cos^{-1}\frac{01}{\sqrt{00}\sqrt{11}} + \cos^{-1}\frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{22}} = \cos^{-1}\frac{02}{\sqrt{00}\sqrt{22}}.$$

A beirt kúpszeletre vonatkozó megelőző fejtegetéseket azért közöltem, mivel ezek a távolság elméletében alkalmazást nyernek, s szükséges volt e meglehetősen bonyolódott képleteket használni, a melyeket természetes helyükön kivül vezettünk be.

A távolság elméletéről, 209—229. pont.

209. Visszatérek az egy-méretű geometriára. Képzeljünk az egyenesen vagyis a pontsor sorozóján egy pontpárt, a melyet én *abszolut pontpárnak* nevezek. Bármely pontpár az abszolut pontpárba beleirt pontpárnak tekinthető; úgy hogy a beirás középpontja és tengelye annak az involucziónak önönmagukhoz konjugált pontjai, a melyet az adott pontpár pontjai és az abszolut pontpár pontjai alkotnak; a középpont és a tengely, mint önönmagukhoz konjugált pontok az abszolut pontpártól harmonikusan vannak elválasztva. A pontpárt így az abszolut pontpárba beirtnak tekintve *pontpár körnek*, vagy egyszerűen *körnek* mondjuk; a beirás középpontját és a beirás tengelyét középpontnak és tengelynek nevezzük. A két önönmagához konjugált pont közül bármelyik vehető középpontul, de ha a választás egyszer megtörtént, úgy meg kell

annál maradni. Czélszerű ha megemlítjük, hogy ha a körnek középpontja és egyik pontja adva van, akkor a kör másik pontja egyértelműen van meghatározva. Mert valóban a tengely a középpontnak az abszolut pontpárra nézve harmonikus pontja, s a másik pont pedig az adott pontnak harmonikus pontja a középpontra és a tengelyre nézve.

210. Definiczióként azt mondjuk, hogy a körnek két pontja egyenlő távolságra van a középponttól. Képzeljünk most két pontot P-t és P'-t; és válaszszuk a P'' pontot úgy, hogy P, P'' oly kör legyen, a melynek P' a középpontja; ugyanily módon válaszszuk a P''' pontot úgy, hogy P', P''' oly kör legyen, a melynek P'' a középpontja; és így tovább: s azután az ellenkező írányban válaszszunk egy $P^{\backprime}$ pontot úgy, hogy $P' P^{\backprime}$ oly kör legyen, a melynek P a középpontja; egy $P^{\backprime\backprime}$ pontot úgy, hogy P, $P^{\backprime\backprime}$ oly kör legyen, a melynek $P^{\backprime}$ a középpontja, és így tovább. A pontoknak oly $\ldots P^{\backprime\backprime}, P^{\backprime}, P, P', P'', \ldots$ sorozatát nyerjük, a melyben a pontok egyenlő távolságra vannak egymástól: s ha a P, P' pontokat minden határon túl közel választjuk egymáshoz, akkor az egész egyenes egyenlő, infinitezimális elemek sorozatára osztódik; s bármily két pont közé foglalt elemeknek száma a két pont távolságát méri. Világos, hogy ha P, $P'P''$ három ebben a sorrendben választott pont, akkor a definicziónak megfelelően

$$\text{Dist}\,(P, P') + \text{Dist}\,(P', P'') = \text{Dist}\,(P, P''),$$

a mi a távolság közönséges fogalmával megegyezik.

211. Hogy megmutassuk, miként vezet a fenti definiczió két pont távolságának analitikai kifejezésére koordinátáikban, vegyük az

$$(a, b, c)(x, y)^2 = 0$$

egyenletet az abszolut pontpár egyenletéül. Oly körnek, a melynek az (x', y') pont a középpontja, ez az egyenlete:

$$(a, b, c)(x, y)^2 (a, b, c)(x', y')^2 \cos^2\theta - \{(a, b, c)(x, y)(x', y')\}^2 = 0;$$

s ennélfogva, ha (x, y), (x'', y'') két pontja a körnek, ez az egyenlet

$$\frac{(a,\, b,\, c\between x,\, y\between x',\, y')}{\sqrt{(a,\, b,\, c\between x,\, y)^2}\sqrt{(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2}}=$$
$$=\frac{(a,\, b,\, c\between x',\, y'\between x'',\, y'')}{\sqrt{(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2}\sqrt{(a,\, b,\, c\between x'',\, y'')^2}}$$

azt fejezi ki, hogy az (x'', y'') és az (x, y) pontok egyenlő távolságra vannak az (x', y') ponttól. Világos, hogy az (x, y) és az (x', y') pont távolságának az

$$\frac{(a,\, b,\, c\between x,\, y\between x',\, y')}{\sqrt{(a,\, b,\, c\between x,\, y)^2}\sqrt{(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2}}$$

függvényének kell lennie, s e függvény alakja abból az imént említett sajátságból határozható meg, hogy ha P, P', P'' három ebben a sorrendben választott pont, akkor

$$\mathrm{Dist}(P,\, P')+\mathrm{Dist}(P',\, P'')=\mathrm{Dist}(P,\, P'').$$

Ez arra a következtetésre vezet, hogy az (x, y) és az (x', y') pont távolsága egyenlő amaz ívnek valamely többszörösével, a melynek cosinusa az utóbb említett kifejezéssel egyenlő (lásd az azelőtti 168. pontot); s általában a távolságot egyenlőnek vehetjük a szóban forgó ívvel, azaz a távolság:

$$\cos^{-1}\frac{(a,\, b,\, c\between x,\, y\between x',\, y')}{\sqrt{(a,\, b,\, c\between x,\, y)^2}\sqrt{(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2}}$$

vagy a mi ugyanaz

$$\sin^{-1}\frac{(ac-b^2)(xy'-x'y)}{\sqrt{(a,\, b,\, c\between x,\, y)^2}\sqrt{(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2}}$$

Ebből következik, hogy a kör egyenletének mind a két alakja

$$(a,\, b,\, c\between x,\, y)^2(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2\cos^2\theta-\{(a,\, b,\, c\between x,\, y\between x',\, y')\}^2=0,$$
$$(a,\, b,\, c\between x,\, y)^2(a,\, b,\, c\between x',\, y')^2\sin^2\theta-(ac-b^2)(xy'-x'y)=0$$

azt fejezi ki, hogy a két pontnak a középponttól való távolsága a θ ívvel egyenlő; vagy, ha úgy akarjuk azt, hogy θ a körnek sugara.

212. Ha $\theta=0$, akkor az

$$xy'-x'y=0$$

egyenletet nyerjük, a mely azt fejezi ki, hogy az (x, y) és (x', y') ugyanaz a pont. Ha $\theta=\frac{1}{2}\pi$, akkor az

$$(a, b, c \between x, y \between x', y')=0$$

egyenletet kapjuk, a mely azt mondja, hogy az (x, y) és (x', y') pontok harmonikusok az absolut pontpárra nézve. Bármely két, az abszolut pontpárra nézve harmonikus pontnak egymástól való távolsága ennélfogva egy negyedkör s az ilyen pontokat egymástól negyedkörnyire fekvőknek mondjuk. A negyedkör a távolság egysége.

213. Ez volt az általános eset, szükséges azonban figyelembe venni azt a különös esetet, a mikor az abszolut pontpár két összeeső pontból áll. Bármely pontnak az abszolut pontpárra nézve harmonikus pontja itt magával az abszolut pontpárral összeeső pont: a kör definicziója ennek következtében egyszerűsbödik; bármely pontpár ugyanis oly körnek tekinthető, a melynek középpontja az abszolut pontnak harmonikus pontja a pontpárra nézve; az egyenest úgy mint az előbb egyenlő infinitezimális elemek sorozatára oszthatjuk, s bármely két pont közt levő elemek száma, a két pont távolságát méri. A mi az analitikai kifejezését illeti, a jelen esetben $ac-b^2$ eltünik, vagyis a távolságra azt kapjuk, hogy oly ív, a melynek sinusa eltünik. Az ívet sinusára vezetve vissza, s elhagyva az eltünő tényezőt, a távolságra véges kifejezést kapunk. Tegyük fel, hogy az abszolut pontpár egyenlete

$$(qx-py)^2=0,$$

vagy a mi ugyanaz legyen az abszolut pontpár (egy pontnak tekintve) a (p, q) pont, akkor az (x, y) és az (x', y') pont távolságára ezt a kifejezést találjuk

$$\frac{xy'-x'y}{(qx-py)(qx'-py')},$$

vagy egy tetszőleges szorzót bevezetve

$$\frac{(q\alpha-p\beta)(xy'-x'y)}{(qx-py)(qx'-py')},$$

a mi ezzel egyenlő

$$\frac{\beta x - \alpha y}{qx - py} - \frac{\beta x' - \alpha y'}{qx' - py'}.$$

Alig szükséges megjegyeznünk, hogy a jelen esetben a két pont negyedkörös vonatkozása teljesen eltünt, s hogy a távolság egysége tetszőleges.

214. Áttérve most a két-méretű geometriára, itt egy bizonyos kúpszeletet kell figyelembe vennünk, a melyet én *abszolut kúpszeletnek* nevezek. Bármely egyenes két pontot határoz meg az abszolut kúpszelettel (metsz ki belőle); ezek az egyenesnek abszolut pontjai, ha azt egy-méretű térnek azaz a pontsor sorozójának tekintjük, s ugyanígy bármely pont két egyenest határoz meg az abszolut kúpszelettel (az abszolut kúpszelet érintői a ponton keresztül), a melyek a pontnak abszolut egyenesei, ha azt egy-méretű térnek azaz a sugársor sorozójának tekintjük. Az egy-méretű geometriára vonatkozó megelőző elmélet megállapitja a távolság fogalmát ezekre a pontsorokra és sugársorokra, ha mindegyiket külön önmagában vesszük tekintetbe; arra, hogy a különböző pontsorokat és sugársorokat egymással kapcsolatba hozzuk, fel kell tennünk, hogy a negyedkör, a mely ezeknél az egyes rendszereknél a távolság egysége, ugyanaz a távolság mindegyik rendszerre (ha, mint az analitikai elméletben, a negyedkört a közönséges szímbolumával $\frac{1}{2}\pi$-vel képviseltetjük, akkor ez a feltevés hallgatólag történt, de ha a definiczió helyébe magát a megjelölt dolgot teszszük és a negyedkörben csak két pont, esetleg két egyenes közti távolságot látunk, a mely pontok illetőleg egyenesek harmonikus vonatkozásban vannak azzal a pontpárral illetőleg egyenespárral, a mely az abszolut pontpárt illetőleg egyenespárt alkotja, akkor rögtön látjuk, hogy a feltevésünk csakugyan egy feltevés, s azt explicite meg kell tenni). De ha ez a feltevés megtörtént, a távolságnak megelőző egy-méretű geometriai elmélete lehetővé teszi az összehasonlítást nem csupán különböző egyeneseken fekvő pontok, vagy különböző pontokon átmenő egyenesek távolsága között, hanem az egy egyenesen fekvő pontok és egy ponton átmenő egyenesek távolsága között is. Bármely egyenesnek pólusa az abszolut

kúpszeletre nézve egyszerűen pólusnak nevezhető, s ugyanígy bármely egyenesnek polárisa az abszolut kúpszeletre nézve egyszerűen polárisnak nevezhető; s azt a tételt nyerjük, hogy két pontnak vagy egyenesnek távolsága a polárisaiknak vagy pólusaiknak távolságával egyenlő, vagy a mi ugyanaz, hogy két pólusnak távolsága és a megfelelő két polárisnak távolsága egyenlő. Definiczióként megállapithatjuk a pontnak az egyenestől való távolságának fogalmát úgy, hogy ez komplementuma a pont polárisa távolságának az egyenestől vagy a mi ugyanaz komplementuma a pont távolságának az egyenes pólusától. A pólus és poláris távolsága ennélfogva a zérusnak a komplementuma, azaz a negyedkör.

215. A negyedkörre vonatkozó előbbi feltevés segitségével lehetséges volt a távolság fogalmát a kör szereplése nélkül megállapítani; de ezt az alakzatot most figyelembe kell vennünk. Az abszolut kúpszeletbe beirt kúpszeletnek neve kör; a beirás középpontja (vagyis a közös érintők metszéspontja) és a beirás tengelye (vagyis a közös pontok összekötő egyenese) a körnek a középpontja és a tengelye. A kör összes pontjai egyenlő távolságra vannak a középpontjától; az összes érintői egyenlő távolságra vannak a tengelyétől, s ez az utóbbi távolság az előbbi távolságnak komplementuma.

216. A körnek e tulajdonságai közvetetlenül reávezetnek a pontok vagy egyenesek távolságának koordinátáikban való analitikai kifejezésére. Vegyük az

$$(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2 = 0$$

egyenletet az abszolut kúpszelet pontegyenletének; a vonalegyenlete

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \between \xi, \eta, \zeta)^2 = 0$$

lesz. Annak a körnek, a melynek középpontja az (x', y', z') pont, pontegyenlete

$$(a, \ldots \between x, y, z)^2 (a, \ldots \between x', y', z')^2 \cos^2\theta - \\ - \{(a, \ldots \between x, y, z \between x', y', z')\}^2 = 0,$$

vagy

$$(a,\ldots\between x,y,z)^2(a,\ldots\between x',y',z')^2\sin^2\theta-$$
$$-(\mathfrak{A},\ldots\between yz'-y'z,\ zx'-z'x,\ xy'-x'y)^2=0,$$

a miből (ugyanazzal az okoskodással, mint az egy-méretű geometria esetében) következik, hogy az (x, y, z) és az (x', y', z') pont távolsága

$$\cos^{-1}\frac{(a,\ldots\between x,y,z\between x',y',z')}{\sqrt{(a,\ldots\between x,y,z)^2}\sqrt{(a,\ldots\between x',y',z')^2}},$$

vagy a mi ugyanaz

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots\between yz'-y'z,\ zx'-z'x,\ xy'-x'y)^2}}{\sqrt{(a,\ldots\between x,y,z)^2}\sqrt{(a,\ldots\between x',y',z')^2}};$$

s a cosinusos képletből kitünik (lásd az előbbi 208. pontot), hogy ha P, P', P'' egy egyenesen fekvő pontok, akkor azt kapjuk, a mint hogy azt is kapnunk kell, hogy

$$\mathrm{Dist}(P,P')+\mathrm{Dist}(P',P'')=\mathrm{Dist}(P,P'').$$

217. Ugyanannak a körnek a vonalegyenlete, ha a tengelyének vonalkoordinátái (ξ', η', ζ')

$$(\mathfrak{A},\ldots\between \xi,\eta,\zeta)^2(\mathfrak{A},\ldots\between \xi',\eta',\zeta')^2\sin^2\theta-$$
$$-\{(\mathfrak{A},\ldots\between \xi,\eta,\zeta\between \xi',\eta',\zeta')\}^2=0,$$

vagy

$$(\mathfrak{A},\ldots\between \xi,\eta,\zeta)^2(\mathfrak{A},\ldots\between \xi',\eta',\zeta')^2\cos^2\theta-$$
$$-K(a,\ldots\between \eta\zeta'-\eta'\zeta,\ \zeta\xi'-\zeta'\xi,\ \xi\eta'-\xi'\eta)^2=0,$$

a miből következik, hogy a (ξ, η, ζ) és a (ξ', η', ζ') egyenes távolsága (mértékkülönbsége azaz szöge)

$$\cos^{-1}\frac{(\mathfrak{A},\ldots\between \xi,\eta,\zeta\between \xi',\eta',\zeta')}{\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots\between \xi,\eta,\zeta)^2}\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots\between \xi',\eta',\zeta')^2}},$$

vagy a mi ugyanaz

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{K(a,\ldots\between \eta\zeta'-\eta'\zeta,\ \zeta\xi'-\zeta'\xi,\ \xi\eta'-\xi'\eta)^2}}{\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots\between \xi,\eta,\zeta)^2}\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots\between \xi',\eta',\zeta')^2}}.$$

218. Mind a két rendszer első képletéből levezethetjük az

(x, y, z) pontnak és a (ξ', η', ζ') egyenesnek egymástól való távolságára vonatkozólag a következő kifejezést

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{K}(\xi' x+\eta' y+\zeta' z)}{\sqrt{(a,\ldots\between x, y, z)^2}\sqrt{(\mathfrak{A},\ldots\between\xi', \eta', \zeta')^2}},$$

a mint az könnyen belátható, ha x', y', z' helyébe $\mathfrak{A}\xi'+\mathfrak{H}\eta'+\mathfrak{G}\zeta'$, ...-ot írunk, vagy pedig ξ, η, ζ helyébe $ax+hy+gz$, ...-ot és $\sin^{-1}$-et teszünk $\cos^{-1}$ helyébe.

219. Megjegyezhetjük, hogy vannak bizonyos egyenesek, t. i. az abszolut kúpszeletnek érintői, a melyekre nézve, ha őket egy-méretű térnek tekintjük, az abszolut pontpár két összeeső pontból áll; s ugyanígy vannak bizonyos pontok, t. i. az abszolut kúpszeletnek pontjai, a melyekre nézve, ha őket egy-méretű térnek tekintjük, az abszolut egyenespár két összeeső egyenesből áll.

220. Különös esetben feltehetjük, hogy az abszolut kúpszelet nem valódi kúpszelet, hanem pontpár. A két pontján átmenő egyenes abszolut egyenesnek nevezhető; ezt az egyenest két összeeső egyenesnek kell tekintenünk. Bármely pont két egyenest határoz meg az abszolut pontpárral, azt a két egyenest tudniillik, a mely a pontot az abszolut pontpár két pontjával összeköti; ha a pontot egy-méretü térnek tekintjük vagyis sugársor sorozójának, akkor ez az egyenespár az abszolut egyenespár a pontra nézve, s az egy ponton átmenő egyenesek távolságának (mérték-különbségének azaz szögének) elmélete ennélfogva teljesen ugyanaz, mint az általános esetben. Minden egyenes azonban egy összeeső pontpárt határoz meg az abszolut pontpárral (az abszolut egyenest két összeeső pontban metszi), a mely összeeső pontpár az abszolut pontpár erre az egyenesre nézve, ha ezt egy-méretű térnek tekintjük vagyis a pontsor sorozójának; az egy egyenesen fekvő pontok távolságának elmélete ennélfogva az az elmélet, a melyet előbb erre a speciális esetre nézve kifejtettünk. De nem hasonlíthatjuk össze úgy, mint az előbb, különböző egyeneseken levő pontoknak távolságát, mivel a jelen esetben nincs negyedkörünk, a mely a távolság egységét szolgáltatja. Az összehasonlításnak a kör segítségével kell történnie, a jelen esetben tudniillik kör a neve minden az abszolut pontpár két

pontján átmenő kúpszeletnek, s az abszolut pontpár két pontjában a kúpszelethez húzott érintők metszéspontja (vagy a mi ugyanaz, az abszolut egyenes pólusa a körre nézve) a körnek a középpontja. Az abszolut egyenes maga pedig, ha szükséges, a kör tengelyének tekinthető. Fel van tételezve, hogy a kör pontjai mindannyian egyenlő távolságra vannak a középponttól és e feltevés lehetővé teszi, hogy a különböző egyeneseken levő távolságokat összehasonlíthassuk. Valóban, egy szerkesztéssel, mely tökéletesen hasonló ahhoz, a mely Euclides I. könyvének II. propositiójában fordul elő, valamely adott A pontból húzhatunk oly véges egyenesdarabot, a mely az adott BC, véges egyenesdarabbal egyenlő, s így valamely az A-n átmenő adott egyenesen is meghatározhatunk oly véges AD egyenesdarabot, a mely az adott BC, véges egyenesdarabbal egyenlő. Mivel az egyenesen fekvő pontok távolságának egysége tetszésszerinti, ezért pontok távolságát egyenesek távolságával nem hasonlíthatjuk össze. A pontnak az egyenestől való távolsága mindazonáltal összehasonlítható két pont távolságával; csupán definiczióul kell felvennünk, hogy a pontnak az egyenestől való távolsága a pontnak távolsága az egyenesnek a ponton átmenő, s negyedkörnyire levő egyenessel való metszéspontjától.

221. A mi az analitikai elméletet illeti, tegyük fel, hogy az abszolut pontpár két pontjának pontkoordinátái (p, q, r), (p_0, q_0, r_0), akkor az abszolut pontpár vonalegyenlete

$$2(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)=0,$$

úgy hogy azt kapjuk $\mathfrak{A}=2pp_0$, $\mathfrak{B}=2qq_0$, $\mathfrak{C}=2rr_0$, $\mathfrak{F}=qr_0+rq_0$, $\mathfrak{G}=rp_0+pr_0$, $\mathfrak{H}=pq_0+qp_0$, s így $K=0$; de

$$K(a, b, c, f, g, h \between x, y, z)^2 = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}^2$$

a miből nyilvánvaló, hogy

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix} = 0$$

az abszolut egyenes egyenlete.

222. Az (x, y, z), (x', y', z') két pont távolságának kifejezése mint oly ív adódik ki, a melynek sinusa eltűnik; de az ívet sinusára visszavezetve, s az eltünő tényezőt elhagyva, ez a kifejezés keletkezik

$$\sqrt{2}\,\frac{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ p, & q, & r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix}}$$

és két egyenes (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') távolságának kifejezése

$$\cos^{-1}\frac{(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')+(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)}{\sqrt{2(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)}\sqrt{2(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')}},$$

vagy a mi ugyanaz

$$\sin^{-1}\frac{(qr_0-rq_0)(\eta\zeta'-\eta'\zeta)+(rp_0-pr_0)(\zeta\eta'-\zeta'\eta)+(pq_0-qp_0)(\xi\eta'-\xi'\eta)}{\sqrt{2(p\xi+q\eta+r\zeta)(p_0\xi+q_0\eta+r_0\zeta)}\sqrt{2(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')}},$$

és végül (x, y, z) pontnak a (ξ', η', ζ') egyenestől való távolságára, ha az ívet sinusára vezetjük vissza és az eltünő tényezőt elhagyjuk, ez a kifejezésünk

$$\frac{\xi' x+\eta' y+\zeta' z}{\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ p, & q, & r \\ p_0, & q_0, & r_0 \end{vmatrix} \sqrt{2(p\xi'+q\eta'+r\zeta')(p_0\xi'+q_0\eta'+r_0\zeta')}}$$

223. Ha a fenti képletbe $(p, q, r)=(1, i, 0)$-t $(p_0, q_0, r_0)=(1, -i, 0)$-t helyettesítünk, a hol mint szokásos $i=\sqrt{-1}$, akkor az abszolut pontpár vonalegyenlete $\xi^2+\eta^2=0$, vagy a mi ugyanaz az abszolut pontpár abból a két pontból áll, a melyben a $z=0$ egyenes az $x^2+y^2=0$ egyenespárt metszi; az utóbb említett egyenespár, mint a mely az abszolut pontpáron keresztülmegy, a definiczió szerint kör; s ez tényleg a zérus sugarú kör, vagyis egy eltünő kör. Ha a z koordinátát is az egységgel tesszük egyenlővé, akkor az abszolut pontpár pontjainak koordinátáira vonatkozó meg-

előző feltevést úgy kell értenünk, hogy az csak eztjelenti $x:y:1=$ $=1:i:0$, vagy $1:-i:0$; azaz azt kell kapnunk, hogy x és y végtelenek, s úgy mint az előbb $x^2+y^2=0$, vagy más szavakban az abszolut pontpár a végtelenben fekvő egyenesnek az $x^2+y^2=0$ eltünő körrel való metszéspontjaiból fog állani. A szóban forgó értékekkel,

224. Az (x, y) és (x', y') pont távolságának kifejezése

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\,;$$

a (ξ, η, ζ) és (ξ', η', ζ') egyenes távolságáé

$$\cos^{-1}\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}=\sin^{-1}\frac{\xi\eta'-\xi'\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}$$

a mi így is írható

$$=\tan^{-1}\frac{\xi}{\eta}-\tan^{-1}\frac{\xi'}{\eta'}\,;$$

és az (x, y) pontnak (ξ', η', ζ') egyenestől való távolsága

$$\frac{\xi'x+\eta'y+\zeta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}},$$

s ezek, mint látjuk, a közönséges sík-geometria képletei, ha (x, y) közönséges derékszögű koordináták.

225. Az általános képletek nem változnak lényegesen, de az alakjuk nagy mértékben egyszerűsödik, ha az abszolut pontpár pontegyenletéül ezt vesszük

$$x^2+y^2+z^2=0$$

vagy a mi ugyanaz, vonalegyenletéül

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0.$$

Valóban, ekkor az (x, y, z) és (x', y', z') pont távolságának kifejezése

$$\cos^{-1}\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,;$$

a (ξ, η, ζ) és (ξ', η', ζ') egyenes távolságáé

$$\cos^{-1}\frac{\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}};$$

s az (x, y, z) pont és a (ξ', η', ζ') egyenes távolságáé

$$\sin^{-1}\frac{\xi'x+\eta'y+\zeta'z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}}.$$

226. Tegyük fel, hogy (x, y, z) közönséges derékszögű koordináták a térben, a melyek ennek a feltételnek tesznek eleget

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

az a pont, a melynek (x, y, z) a koordinátái, a gömb felületén fekvő pont lesz, s a $\xi x+\eta y+\zeta z=0$ egyenlet, (ha az utóbb említett egyenlet mindig fennáll) a gömbnek egy legnagyobb köre lesz; s mivel a ξ, η, ζ-nak csak a viszonyát vesszük tekintetbe, azt is mondhatjuk, hogy $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$. Az $x^2+y^2+z^2$ és $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ kifejezéseket továbbra is megtarthatjuk képleteinkben, a nélkül, hogy értéküket, az egységet, helyettesitenők s tényleg helyén való is az összes képleteket ily módon eredeti alakjokban megtartani. Igy a sphærikus geometriának egy rendszerét kapjuk; s kitünik, hogy az ily rendszerben az abszolut kúpszelet az a sphærikus kúpszelet, a mely a gömbnek metszésvonala az $x^2+y^2+z^2=0$ concentrikus kúppal vagy eltünő gömbbel. Az a körülmény, hogy az abszolut kúpszelet valódi kúpszelet és nem pontpár csupán, a reális alapja annak, hogy a sphærikus geometria és a közönséges sík geometria közt különbséget teszünk és ez az oka a sphærikus geometria tételeiben fennálló teljes dualitásnak.

227. A megelőzőkben a geometriai elmélettel együtt, a távolság analitikai elméletét adtam úgy illustratio czéljából, mint azért, mivel fontos hogy a távolságra koordinátákban való analitikai kifejezésünk is legyen; azonban a geometriai elméletet magában véve is teljes egésznek tekintem: a főeredménye a következő, a síkban (vagy a két-méretű geometria terében) felvéve t. i. egy kúp-

szeletet, a melynek abszolut kúpszelet a neve, ezen kúpszelet segítségével, descriptiv szerkesztésekkel bármely egyenest vagyis pontsort infinitezimális elemek határtalan sorozatára oszthatunk fel, a melyekről (a távolság definicziója czéljából) felvesszük hogy egyenlők; a pontsor két pontja vagy a sugársor két sugara közti elemek száma a távolságot méri a két pont vagy a két egyenes között; s a negyedkör segítségével, mint oly távolság segítségével, a mely egyformán úgy egyenesekre mint pontokra nézve létezik, össze tudjuk hasonlítani két egyenes távolságát két pontéval; s egy pontnak meg egy egyenesnek távolsága előtüntethető akár úgy, mint két pont távolsága, akár úgy, mint két egyenes távolsága.

228. A közönséges sphærikus geometriában az általános elmélet semmi módosuláson nem megy át; az abszolut kúpszelet valódi kúpszelet, a gömbnek metszésvonala a vele concentrikus eltünő gömbbel.

229. A közönséges sík geometriában az abszolut kúpszelet pontpárrá fajul, t. i. a végtelenben levő egyenes metszéspontjai valamely eltünő körrel, vagy a mi ugyanaz az abszolut kúpszelet a két végtelenben fekvő körpontból áll. Az általános elmélet ennélfogva módosul, a mennyiben itt a pontokra nézve nincsen olyan távolság, mint a negyedkör és két egyenes távolsága semmi módon nem hasonlítható össze két pont távolságával; csak a pontnak az egyenestől való távolsága tüntethető elő úgy, mint két pontnak a távolsága.

230. Befejezésül megjegyzem, hogy jelen bevezető értekezésemben az alakok elméletének geometriai részéről, *a saját szempontomból* az lett volna a legrendszeresebb eljárás, hogy a távolság fogalmát és a metrikus geometriának fogalmait teljesen figyelmen kívül hagyom; mert az elmélet valójában az, hogy valamely alakzatnak metrikus tulajdonságai nem tulajdonságai az alakzatnak, ha azt egymagában minden mástól elkülönitve vesszük figyelembe, hanem akkor válnak tulajdonságaivá, a mikor egy másik alakzattal kapcsolatban tekintjük, tudniillik az abszolutnak nevezett kúpszelettel. Az eredeti alakzat tartalmazhat egy kúpszeletet, így például megállapithatjuk két vagy több kúpszeletből álló alakzat saját-

ságait, s ekkor a tiszta descriptiv geometria körében vagyunk: átlépünk belőle a metrikus geometriába, azáltal, hogy az alakzat egyik kúpszeletét meghatározzuk a vonatkozások alapjául, s azt abszolut kúpszeletnek nevezzük. A metrikus geometria így a projektiv geometriának egy része, s a projektiv geometria felöleli az egész geometriát; s ha ezt elismerjük, úgy semmi okunk sincs arra, hogy egy bevezető értekezésben a metrikus geometria specziális fejezetével foglalkozzunk; mivel azonban a távolság fogalmát és a metrikus geometria fogalmait indokolás nélkül, így figyelmen kívül hagyni nem lehet, szükséges volt reájuk hivatkozni azért, hogy megmutassuk, hogy ekként benne vannak a projektiv geometriában.

Jegyzetek és utalások.*

Az abszolut alakzat fogalma úgy hiszem a jelen értekezésben volt legelőször bevezetve. A távolságnak ezen alapuló és itt kifejtett elméletére vonatkozólag hivatkozom a következő értekezésekre:

Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann. IV. k. (1871), 573—625. l.

Cayley, *On the Non-Euclidian Geometry*, Math. Ann. V. k. (1872) 630—634. l.

Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann. VI. k. (1873) 112—145. l.

Klein első értekezésében, két pont távolságára, az én $\cos^{-1}$-es kifejezésem helyébe egy logarithmikusat helyettesít, azaz a lineáris geometriában, ha a két meghatározott pont A, B, akkor bármely két pont P, Q távolságára felállított definiczió ez

$$\text{dist}(PQ) = c \log \frac{AP \, . \, BQ}{AQ \, . \, BP};$$

ez egy lényeges javitás, mert egyszerre látjuk, hogy az alap relá-

---

* Cayley jegyzete értekezéséhez összegyűjtött munkáiban: The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley 1889 II. k. 604—606. l.

czió dist (PQ) + dist (QR) = dist (PR) ki van elégítve: tényleg nyerjük

$$\text{dist}\,(QR) = c \log \frac{AQ.BR}{AR.BQ}$$

és innen

$$\text{dist}\,(PQ) + \text{dist}\,(QR) = c \log \frac{AP.BR}{AR.BP} = \text{dist}\,PR.$$

Az én hatodik értekezésemben azonban az a kérdés merül fel, hogy mit értünk a «koordinátákֻ»-on: ha a lineár geometriában (x, y) a P pontnak koordinátái, ez azt jelenti-e, hogy az $x:y$ a P pont távolságának viszonya a szó közönséges értelmében, két meghatározott ponttól A, B-től: s ha ez így van, nem függ-e végtére a távolság fogalma ebben az új értelemben a távolság fogalmától a szó közönséges értelmében? Hasonlóképen Klein definicziójában, AP, BQ, AQ, BP távolságokat jelentenek-e a szó közönséges értelmében, s ha ez így van, nem függ-e végtére a távolság fogalma az új értelemben, a távolság fogalmától közönséges értelmében? A mi az én értekezésemet illeti, ott a szempont az volt, hogy a «koordinátákat» nem tekintettem távolságoknak vagy távolságok viszonyának, hanem úgy mint egy felvett alapfogalmat, a mely magyarázatra nem szorul vagy azt nem engedi meg. Ujabban jutott eszembe, hogy puszta számértékeknek tekinthetők, a melyekkel tetszés szerint felruházzuk a pontot oly módon, hogy minden adott pontra az $x:y$ viszonynak határozott számértéke van és hogy az $x:y$-nak minden adott számértékéhez egy egyetlen pont tartozik. S neki fogtam, hogy Klein formuláit ugyanígy értelmezzem; ugyanis A, B, P, Q-t oly pontoknak tekintve, a melyek tetszésszerint össze vannak kötve meghatározott számértékkel a, b, p, q-val, a képletben levő logarithmus az $(a-p)(b-q) \div (a-q)(b-p)$ logarithmusa lesz. De Klein professor felhívta figyelmemet arra a vonatkozásra (második értekezésének 132. lapján), a mely e közt és Staudt-nak Geometrie der Lage, 1847 cz. művében (vagy még teljesebben a Beiträge zur Geometrie der Lage, Zweites Heft, 1857 cz. művében) kifejtett elmélet között fennáll. A képletben levő logarithmus log (A, B, P, Q) és Staudt elméletének megfelelően

(A, B, P, Q)-nak azaz négy pont anharmonikus viszonyának mindennemű távolsági fogalomtól függetlenül megvannak egy számbeli mennyiségnek alaptulajdonságai, azaz két ilyen viszonynak van összege és szorzata is, s ez az összeg és a szorzat mind a kettő ugyanilyen viszonya négy pontnak, a melyeket tiszta descriptiv szerkesztésekkel meg lehet határozni. A bebizonyítás könnyebb a szorzatra nézve: legyen a két viszony (A, B, P, Q) és (A', B', P', Q'): akkor ezeket adott pontoknak tekintve megszerkeszthetjük R-et úgy, hogy $(A', B', P', Q') = (A, B, Q, R)$: a két viszony ekként (A, B, P, Q) és (A, B, Q, R), s azt mondjuk, hogy a szorzatuk (A, B, P, R) (vegyük figyelembe ehhez, hogy a távolság fogalmát bevezetve a két tényező $\frac{AP.BQ}{AQ.BP}$ és $\frac{AQ.BR}{AR.BQ}$ és így a szorzatuk $= \frac{AP.BR}{AR.BP}$, a mi (A, B, P, R), a mi a definicziónak az alapja). Az összeghez szerkesszük Q_1-et úgy, hogy $(A', B', P', Q') = (A, B, P, Q_1)$; az összeg akkor $(A, B, P, Q) + (A, B, P, Q_1)$; s ha most úgy szerkesztjük S-et, hogy (A, A), (Q, Q_1), (B, S) involuczióban legyenek, akkor azt mondjuk, hogy $(A, B, P, Q) + (A, B, P, Q_1) = (A, B, P, S)$. {Vegyük figyelembe e mellett, hogy a távolság fogalmát innét bevezetve az utóbb említett egyenlet ez

$$\frac{AP.BQ}{AQ.BP} + \frac{AP.BQ_1}{AQ_1.BP} = \frac{AP.BS}{AS.BP}$$

azaz

$$\frac{BQ}{AQ} + \frac{BQ_1}{AQ_1} = \frac{BS}{AS},$$

a mi kifejezi, hogy S a fenti módon van meghatározva; tényleg látható, hogy a

$$\frac{b-q}{a-q} + \frac{b-q_1}{a-q_1} = \frac{b-s}{a-s}$$

egyenlet evvel æquivalens

$$\begin{vmatrix} 1, & b+s, & bs \\ 1, & 2a, & a^2 \\ 1, & q+q_1, & qq_1 \end{vmatrix} = 0\}$$

Mindazonáltal el kell ismernünk, hogy STAUDT-nak ezt az elméletét alkalmazva a távolság elméletére, a dolognak végül az a látszata, hogy körben következtetünk, mivel a két viszony szorzatának megalkotása tényleg nem más, mint ennek a relácziónak feltevése

$$\text{dist}\, PQ + \text{dist}\, QR = \text{dist}\, PR.$$

Hivatkozhatom még Sir R. S. Ball ily czímű értekezésére «On the theory of the Content» Trans. R. Irish Acad. XXIX. k. (1889), 123—182. l., a hol ugyanez a nehézség meg van vitatva. A bekezdő mondata ez: «Ebben az elméletben [a nem-euklidesi geometriában] úgy látszik, mintha a két pont közti távolság közönséges fogalmát helyettesíteni akarnók egy bizonyos anharmonikus viszony logarithmusával. De ez a viszony maga magában hordja a közönséges módon mért távolságnak fogalmát. Hogyan tudnók tehát a távolság régi fogalmát a nem-euklidesi fogalommal kiszorítani, a mikor ez utóbbinak igazi definicziója magában tartalmazza az elsőt.

Az értekezéseknek terjedelmes jegyzékét adja Halsted: Bibliography of Hyper-Space and of Non-Euclidian Geometry, Amer. Math. Journ. I. k. (1878), 261—276 és 384—385 l., továbbá II. k. (1879) 65—70 l.

ELMÉLKEDÉS

A TŰZ MOZGATÓ EREJE

S A GÉPEK FELETT,

A MELYEK EZEN MOZGATÓ ERŐ KIFEJTÉSÉRE

ALKALMASAK.

IRTA

S. CARNOT

AZ ÉCOLE POLYTECHNIQUE VOLT NÖVENDÉKE.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

FORDITOTTA

LUKÁTS LÁSZLÓ.

BUDAPEST.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT.

1897.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

ELMÉLKEDÉS

A TŰZ MOZGATÓ EREJE S A GÉPEK FELETT, A MELYEK EZEN MOZGATÓ ERŐ KIFEJTÉSÉRE ALKALMASAK.

Irta: S. CARNOT

az Ecole Polytechnique volt növendéke.

Mindenki előtt ismeretes, hogy a melegség mozgást hozhat létre, sőt hogy nagy mozgató erő kifejtésére képes: a manapság annyira elterjedt gőzgépek ennek szembeszökő bizonyítékai.

A melegség az, a melynek tulajdonítandók mindama nagy mozgások, a melyek a földön szemünkbe ötlenek; ő általa jönnek létre a légkör mozgásai, a felhők felemelkedése, az eső és egyéb légköri tünemények; a földet barázdáló vízáramlások, a melyeknek egy kis részét az ember is hasznára tudja fordítani; végül a földrengések, a vulkáni kitörések oka ismét a melegség.

E mérhetetlen tárházból nyerhetjük a számunkra szükséges mozgató erőt; a természet mindenütt ellátván tüzelő anyaggal, képesít bennünket bárhol és bármikor meleget s így ebből mozgató erőt létrehozni. Kifejteni s czéljainkhoz alkalmazni ezen mozgató erőt: ez a hőgépek czélja. Ezen gépek tanulmányozása nagy érdekű, fontosságuk igen nagy, használatuk napról-napra nő; a czivilizált társadalomban nagy forradalmat létrehozni hivatvák.

Már hőgép dolgozik bányáinkban, mozgatja hajóinkat, ássa kikötőinket s folyóinkat; vasat kovácsol, fát dolgoz fel, őröl, fon és sző, s a legnagyobb terheket szállítja tova stb.; úgy látszik egykor ő lesz az általános munkagép s elragadja az elsőbbséget az állati, vízi s légköri erőktől. Az első felett az olcsóság az előnye; a két utóbbi felett pedig azon megbecsülhetetlen sajátsága, hogy mindenütt, minden időben s megszakítás nélkül használható.

Ha valamikor a gőzgép annyira tökéletesedik, hogy olcsón létesíthető s munkában tartható lesz: minden kivánható tulajdonsággal fog birni, s az iparnak ma még egész kiterjedésében nehezen előrelátható fellendülését fogja létrehozni.

Valóban, nem csak egy hatalmas s kényelmesen kezelhető munkagép, a mely bárhol beszerezhető s bárhova elszállítható, fog a mostan használtak helyébe lépni, hanem azon iparágakat is, a melyekben használják, gyorsan fel fogja lendíteni, sőt az ipar teljesen új ágait is hozhatja létre.

A legfőbb szolgálat, a melyet a hőgépnek Anglia köszönhet, mindenesetre az, hogy fellendítette szénbányászatát, a mely már pangott s végső elhanyatlással fenyegetett azon bajok miatt, a melyeket a bányák víztelenítése s a bányászás fokozódó nehézségei okoztak.* Másodsorban következik azon szolgálat, a melyet a vasgyártásnak tett, egyrészt a szén bőséges termelése által, pótolván a már-már fogyni kezdő fát; másrészt sokféle hatalmas gép használatának lehetővé tétele vagy megkönnyítése által.

A vas és tűz az, a mint tudjuk, a mi a gépipart fentartja. Talán nem is létezik Angliában iparvállalat, a melynek létele ne volna ezekre alapítva, s a mely bőségesen fel ne használná őket. Elvenni manapság Angliától gőzgépeit, annyi, mint ha szenét és vasát vennők el; annyi, mint elapasztani gazdagságának valamennyi forrását, lerombolni boldogulásának minden eszközét; annyi, mint megsemmisíteni ezen óriási hatalmasságot. Hadi tengerészetének, a melyet pedig legfőbb támaszának tekint, elpusztítása tán kevésbbé volna reá nézve gyászos.

A gyors és biztos hajózás gőzhajók segélyével úgy tekinthető,

---

* Állíthatjuk, hogy a szénbányászat megtizszereződött Angliában, a mióta a gőzgépeket feltalálták. Ép ez áll a réz-, ón- és vasbányászatra nézve is. Ugyanez a hatás, a mely egy félszázadja Angliában nyilvánult, ismétlődik most az újvilág arany- és ezüstbányáiban, a melyek szintén hanyatlófélben voltak; főleg mert a gépek a bányavíz eltávolítására s az ásványok felhozására elégtelenek voltak.

mint teljesen új iparág, a melyet a gőzgépeknek köszönhetünk. Ez már lehetővé tette a gyors és szabályos közlekedést tengerszorosokban, az ó- és újvilág nagy folyamain. Lehetővé tette az eddig még vad vidékek bejárását, a hová még csak nem rég alig lehetett behatolni; lehetővé tette a czivilizáczió gyümölcseinek széthordását a földgömb oly helyeire, a hová nélküle még csak sok év mulva jutottak volna el. A gőzhajózás, hogy úgy mondjuk, mintegy közelebb hozza egymáshoz a legtávolabbi nemzeteket is; a föld népeit egyesíteni törekszik, mintha mind egy s ugyanazon vidék lakói volnának. Valóban az utazás idejét, fáradalmait, bizonytalanságait s veszélyeit megkisebbíteni nem annyi-e, mint a távolságokat hatalmasan csökkenteni?*

A hőgépek feltalálása, a mint a legtöbb emberi találmányé, majdnem esetlen próbálgatásokból vette kezdetét; próbálgatásokból, a melyek különböző személyeknek tulajdoníttattak, s a melyeknek valódi szerzőjét alig ismerjük. Különben is nem annyira ezen első próbálgatásokban áll az érdemleges feltalálás, mint inkább a további tökéletesítésekben, a melyek a hőgépeket azon állapotba hozták, a melyben mai nap látjuk őket. Majdem akkora a távolság a jelenlegi gépek s azon első készülékek közt, a melyekben a gőz feszítő erejét először alkalmazták, mint a fedélzetes hajó s az első összetákolt tutaj közt.

Ha egy feltalálás tisztessége azon nemzetet illeti, a melynek ölében a teljes növekedését, kifejlődését nyerte, ezen tisztesség nem vonható meg Angliától: Savery, Newcomen, Smeathon, a hires Watt, Woolf, Trevetick s néhány más angol mérnök a hőgép igazi megteremtői; az ő kezeik közt ment át a tökéletesedés minden fokozatos lépcsőjén. Különben is természetes, hogy egy találmány ott keletkezzék s főleg ott fejlődjék ki s tökéletesedjék, a hol szükségét legjobban érzik.

---

* Azt mondtuk: kisebbíti az utazás veszélyeit; valóban, jóllehet a hőgép alkalmazása a hajón némi veszélylyel jár, a melyet azonban nagyon túlozni szoktak; de ezen veszélyek túl vannak kárpótolva azon előnyök által, a melyeket a járt és ismert út biztos betartásának lehetősége, s az ad, hogy a hajó az őt part vagy zátony felé hajtó szeleknek ellen tud állni.

Daczára a hőgépeken végzett mindenféle vizsgálatoknak, daczára a kielégítő állapotnak, a melybe mai napig eljutottak, az elméletük nagyon hátra van, s a megjavításuk czéljából tett próbálgatások eddigelé csak vaktában történtek. Gyakran felszinre merült a kérdés, ha vajjon a melegnek mozgató ereje korlátolt-e, vagy határtalan?* ha vajjon a hőgépek lehetséges tökéletesítéseinek van-e kijelelhető határuk; határ, a melyet bármily eszközök segélyével is túlhaladni a dolgok természete gátol; vagy ellenkezőleg ezen tökéletesités a végtelenig vihető-e? Ép így sokáig keresték, s manapság is keresik, hogy nem létezik-e közvetítő, a mely alkalmasabb volna a vízgőznél a melegség mozgató erejének kifejtésére; ha vajjon, hogy példát hozzunk fel, a légköri levegőnek nem volna-e e tekintetben előnye? Szándékunkban van e kérdéseket szigorú vizsgálat alá vonni.

A melegség által való mozgáslétrehozatal jelenségét nem tekintették eléggé általános szempontból. Csakis oly gépekben vizsgálták, a melyeknek a természete, s hatásuk módja nem engedték meg, hogy felvegye mindama terjedelmet, a melyre képes. Ily gépekben a jelenség, hogy úgy mondjuk, csonkítva, tökéletlenül nyilvánul; nehéz felismerni s tanulmányozni a törvényeit.

Hogy a melegség által való mozgáslétesítésnek elvét egész általánosságában szemügyre vegyük, minden mechanizmustól s különös közvetítőtől elvontan kell gondolnunk; oly okoskodást kell felállítani, a mely nemcsak a gőzgépre,** hanem bármely hőgépre is alkalmazható, bárminő legyen is az igénybe vett anyag, s bármiképen hassunk is reá.

Azon gépek, a melyek mozgásukat nem a melegségből nyerik, hanem az ember vagy az állatok erejéből, vízesésből, a széltől

* Mi itt a mozgató erő alatt azon hasznos hatást értjük, a melyet egy munkagép ki tud fejteni. Ezen hatás mindig összehasonlítható egy bizonyos súly felemelésével bizonyos magasságra; ennek mértéke, a mint tudjuk, a súly szorzata az emelkedéssel.

** Itt megkülönböztetjük a gőzgépet az általánosságban vett hőgéptől: ez bármely anyagot használhat, vízgőzt is, vagy bármi mást a melegség mozgató erejének előidézésére.

stb., a legmesszebb terjedő részletezésig tanulmányozhatók a géptan segélyével. Minden eset előre van látva, minden képzelhető mozgásuk alá van vetve biztosan megállapitott s minden körülmény közt alkalmazható általános elveknek. Ime ez a teljesen kidolgozott elmélet ismertető jele. Ilyen hasonló elmélet bizony hiányzik a hőgépekre; s nem is lesz előbb, mint a mikor a fizika törvényeit eléggé kiterjesztettük s általánositottuk, hogy előre képesek legyünk felismerni a bizonyos meghatározott módon bizonyos testre ható melegség minden hatását.

Feltételezzük a következőkben a közönséges gőzgép különböző részeinek legalább felületes ismeretét. Igy tehát feleslegesnek tartjuk kifejteni, mi az a katlan, kazán, gőzhenger, dugattyú, stb.

A mozgás létrehozását gőzgép segélyével mindig bizonyos jelenség kiséri (I.), a melyre figyelmünket kell hogy forditsuk. Ezen jelenség a melegség egyensulyának helyreállása, azaz a melegség átmenetele egy többé-kevésbbé meleg testből egy másik többé-kevésbbé hideg testbe. Mi történik voltaképen egy működésben lévő gőzgépben? A melegség, a mely a katlanban a tüzelő anyag elégéséből keletkezett, áthatol a kazán falán, gőzt fejleszt, s ebben mintegy testet ölt. Ez őt magával viszi előbb a hengerbe, a hol valami funkcziót végez, s onnan a süritőbe, a melynek hideg vizével érintkezésbe jövén, lecsapódik. Végelemzésben tehát a süritő hideg vize kapja meg az égésből fejlődött melegséget. Ép úgy felmelegszik a gőz közvetitése utján, mintha direkte a katlan fölött lett volna. A gőz itt nem más, mint a melegség közvetitője, átvivő eszköze; ugyanazon szerepet viszi, mint a mikor fürdőt melegitünk gőzzel; csak az a különbség, hogy a jelen esetben mozgása kihasználtatik.

A most leirt műveletben igen könnyen felismerhetjük a melegség egyensulyának helyreállitását, s a melegségnek átmenését melegebb testből hidegbe. Ezen testek elseje a katlan lángja, a másodika a süritő vize. A melegség egyensulyának helyreállása köztük megy végbe, ha nem is teljesen, legalább részben: mert egyrészt a tüzes gázok betöltvén szerepüket, körülnyaldosván a kazánt, a kéményen át jóval alacsonyabb hőmérséklettel távoznak el, mint a melyet égés közben nyertek; másrészt a sürítő vize magasabb hőmérséklettel távozik el a géptől, mint a hogy oda jött. A gőzgépekben tehát a mozgató erő kifejtése nem a melegség tényleges elfogyasztása, hanem az által jön létre, «hogy az átmegy melegebb testből hidegebbe», azaz egyensulya helyreáll, bármi okból történt is ezen egyensuly felbomlása, vegyi folyamat — égés — vagy bármi más által. Látni fogjuk nemsokára, hogy ezen elv minden a melegség által hajtott gépre nézve áll. (II.)

Ezen elv értelmében arra, hogy mozgató erőt fejtsünk ki, nem elégséges meleget fejleszteni: hidegre is szükségünk van, mert nélküle a melegnek nem vennők hasznát. Valóban, ha körülöttünk csakis oly meleg testeket találnánk, mint a katlan, miképen tudnók megsüríteni a gőzt? A fejlesztés után hova tennők? Nem kell hinni, hogy a mint az némely gépeknél történik, a levegőbe tudnók bocsátani: nem venné az fel.* A dolgok tényleges állapotában is csak azért veszi fel, mert mint hatalmas sürítő működik, mivel hidegebb mint a gőz: különben csakhamar megtelleněk, vagy inkább már előzetesen telítve volna.**

Mindenütt, a hol hőmérsékkülönbség van, mindenütt a hol a melegség egyensulyának helyreállítása lehetséges, mozgató erőt is létesíthetünk. A vízgőz eszköz ezen mozgató erő létesítésére, de

---

* Némely magas nyomású gép a sürítő helyett a levegőbe bocsátja a gőzt. Leginkább ott használják, a hol nehéz volna a sürítéshez szükséges hideg víz megszerzése.

** A víznek cseppfolyós állapotban való létele, a melyet fel kell vennünk, mert különben nem tudnók a gőzgépeket táplálni, oly nyomást tételez fel, a mely képes a víz elpárolgását megakadályozni; azaz ép akkora, vagy nagyobb nyomást, mint az ugyanazon mérsékletnél uralkodó vízgőznyomás. Ha a légkör nem gyakorolna ily nyomást, rögtön annyi vízgőz emelkednék fel, a mennyi képes volna ily nyomást gyakorolni, s azért mindig le kellene győzni ezen nyomást, hogy a gőzt emez új légkörbe ki tudjuk bocsátani: ez pedig nem volna más, mint legyőzni azt a feszitő erőt, a mely a gőznek a rendes módszer szerint való megsűrítése után megmarad. Ha földünk felületén igen magas hőmérséklet uralkodnék, a mint nem kételkedünk, hogy belsejében uralkodik is, az óczeán minden vize a légkörben volna gőzalakban, s egy csepp sem volna folyékony állapotban.

nem az egyedüli: minden test használható e czélra; mindnyájan képesek térfogatukat változtatni, összehuzódni meg kitágulni a hideg és meleg váltakozó behatása alatt; képesek ezen térfogatváltozásuk alatt bizonyos ellenállásokat legyőzni, s így mozgató erőt fejteni ki. Felváltva melegített s lehütött szilárd test, fémrud például, hosszabbodik és rövidül, s a végeire erősitett testeket mozgatni képes.

A felváltva melegitett, majd lehütött folyadék kitágul s összehuzódik s kitágulása ellen működő kisebb-nagyobb ellenállásokat győzhet le. A légnemű test hőfokának változásával nagy térfogatváltozást szenved; ha kitágulható edénybe, pl. dugóval ellátott hengerbe van zárva, nagy mozgást hoz létre. Minden elpárologtatható anyag gőze, mint pl. a borszeszé, kénesőé, kéné, stb. ugyanazt a szerepet tudná betölteni, mint a vizgőz. Ez pedig felváltva melegítve s lehűtve, az állandó gázak módjára hozná létre a mozgató erőt, azaz a nélkül, hogy cseppesülne. Mind e módok nagy részét ajánlották már, sőt többeket meg is próbáltak, jóllehet lényeges eredmény nélkül.

Megmutattuk, hogy a mozgató erőt a melegség egyensulya helyreállításának köszönhetjük a gőzgépekben: ez áll nem csak a gőzgépekre, hanem minden hőgépre nézve is, azaz minden oly gépre, a melyet a melegség hajt. A melegség bizonyára csak az által lehet a mozgás előidézője, hogy a testekben térfogat- és alakváltozásokat hoz létre; ezen változásokat nem a hőmérséklet állandóságából, hanem a meleg és hideg váltakozásából nyerjük; azonban egy test felmelegitésére egy másik melegebb test, lehűtésére egy másik hidegebb kell; a melegséget szükségképen az első testből vesszük, hogy valamely közvetítő anyag segélyével átvigyük a másodikba.

Ez pedig nem más, mint a melegség egyensulyának helyreállítása, ha nem is egészen, legalább részben.

Magától merül fel itt a következő érdekes és fontos kérdés: a melegség mozgató ereje változatlan mennyiségű-e, vagy pedig változik az anyaggal, a melyet a melegség hatásának közvetítésére alkalmaztunk? Világos, hogy a kérdést csak adott melegmennyiség s adott hőmérsékletkülönbség esetére tehetjük fel.* Legyen pl. egy 100° hőmérsékletű A test és egy 0° meleg B test, s azt kérdezzük: mennyi mozgató erő jön létre, ha egy adott melegmennyiség (pl. a mennyi 1 kg. jég megolvasztására szükséges) megy át az első testből a másodikba? Azt kérdezzük, vajjon ezen mozgató erő szükségképen korlátolt-e? vajjon változik-e a szerint, a mint más és más anyagot használunk? ha vajjon a vízgőz e tekintetben több előnynyel kecsegtet-e, mint a borszesz, kéneső gőze, vagy mint valamely állandó gáz, vagy bármely test? Megkiséreljük megoldani ezen kérdéseket a már eddig tett megjegyzések felhasználásával.

Már fentebb megjegyeztük azon magától érthető vagy a meleg által okozott térfogatváltozások feletti elmélkedés útján legalább sejthető tényt, hogy: «mindenütt a hol hőmérsékletkülönbség van, mozgató erő jöhet létre». Viszont: mindenütt, a hol mozgató erőt fogyasztunk el, lehetséges hőmérsékletkülönbséget hozni létre, lehetséges a melegség egyensulyának felbomlását idézni elő. A testek ütése, dörzsölése vajjon nem módok-e hőmérsékletük emelésére, még pedig magasabbra, mint a környezeté s így az egyensuly felbomlasztására ott, a hol ezen egyensuly megvolt? Kisérleti tény az, hogy a légneműek hőmérséklete összenyomásuk által emelkedik, ritkításuk által csökken. Ime biztos mód a testek hőmérsékletének változtatására s a melegség egyensulyának felbomlasztására annyiszor, a hányszor csak akarjuk, ugyanazon anyag segélyével. (III.)

A vízgőz is, ellenkező értelemben felhasználva, mint a hogy a gőzgépekben történik, úgy tekinthető mint eszköz a melegség egyensulyának megbontására. Hogy erről meggyőződjünk, elég, ha jól meggondoljuk, hogyan fejlődik ki a mozgató erő a melegnek a vízgőzre való hatása által? Gondoljunk két testet A-t és B-t,

* Feleslegesnek tartjuk itt megmagyarázni hogy mi a melegmennyiség vagy röviden melegség (quantitativ értelemben); sem leírni, hogyan mérhetjük azt a kaloriméter segélyével. Ép úgy nem magyarázzuk meg, mi a lappangó meleg, hőmérséklet, fajlagos meleg stb.; az olvasó úgy is tudja jelentésüket az elemi fizikából és chemiából.

a melyek mindegyike állandó hőmérsékleten van tartva, még pedig *A* hőmérséklete magasabb, mint *B*-é: ezen két test, a melyekkel meleget közölhetünk, vagy tőlük elvehetünk a nélkül, hogy hőmérsékletük változnék, két határtalan melegforrásnak tekinthető. Nevezzük az elsőt katlannak, a másodikat hűtőnek.

Ha bizonyos melegmennyiségnek *A*-ból *B*-be való átvitele által mozgató erőt akarunk létrehozni, a következő módon járhatunk el:

1. Meleget vonhatunk el *A* testtől, hogy azzal gőzt fejleszszünk; azaz ezen testtel a katlan szerepét tölthetjük be, vagy inkább a kazán falát alkotó fémét a közönséges gépekben; felteszszük itt, hogy a gőz az *A* test hőmérséklete mellett fejlődik.

2. Miután a gőzt egy kitágulható edénybe, pl. dugóval ellátott hengerbe vezettük, megnagyobbítjuk ezen edény térfogatát s így a gőzét is. Eképen megritkulva lehül, mint minden rugalmas fluidum; tegyük fel, hogy e ritkítást egészen addig a pontig eszközöltük, a melynél a hőmérséklete épen a *B*-ével lesz egyenlő.

3. A gőzt cseppfolyósítjuk az által, hogy *B* testtel hozzuk érintkezésbe és hogy állandó nyomást gyakorolunk rá mindaddig, a míg teljesen cseppfolyóvá nem lett. A *B* test itt a közönséges gőzgép sürítője vizének szerepét viszi, azon különbséggel, hogy cseppfolyósítja a gőzt a nélkül, hogy keverednék vele s hogy maga is változtatná hőmérsékletét.*

---

* Valaki tán fennakadhatna azon, hogy a *B* test, a mely ép oly hőmérsékletű mint a gőz, mégis cseppesítheti ezt. Kétséget nem szenved, hogy ez így egészen szigorúan nem áll; de a legkisebb hőfokkülönbség előidézi ezen cseppesülést s ez elég az okoskodásunk igazolására. Épen úgy, mint a differentiálszámításnál elég, hogy az elhanyagolt mennyiségeket úgy gondoljuk, mint az egyenletekben megmaradt mennyiségekhez képest végtelenül csökkenthetőket, hogy biztosak lehessünk a végleges eredményről.

A *B* test a gőzt megcseppesiti a nélkül, hogy saját hőmérséklete változnék; ez feltevésünkből következik; mert feltettük, hogy ezen testet állandó hőmérsékleten tartjuk; azon mértékben, a mint a gőztől melegséget kap, meleget veszünk el tőle; ebben a helyzetben van a sűrítő fala, a mikor a gőz cseppesítése a hideg víz külső alkalmazása útján történik; a mint régebben több gépnél történt. Épen úgy, a mint valamely edényben a víz állandó

A most leirt műveleteket akár így, akár az ellenkező irányban is végezhetjük. Semmi sem akadályoz bennünket, hogy *B* test melegsége által fejleszszünk gőzt, a mely ugyanoly hőmérsékletű legyen ; azt most összenyomjuk annyira, hogy az *A* test hőmérsékletét vegye fel ; végre cseppesítsük ezen utóbbi testtel való érintkezés által, a nyomást egész a teljes cseppfolyósulásig fentartván.

Az első műveletek által egyidejüleg melegség átvitele *A*-ból, *B*-be, és mozgató erő létrejövetele történt ; ha a műveleteket megforditjuk : mozgató erőnek fogyasztása s melegség visszavitele *B*-ből *A*-ba. Azonban, ha mind a két esetben ugyanakkora gőzmennyiségre hatottunk, s közben sem mozgató erő, sem melegségveszteség nem történt, akkor az első esetben létrehozott mozgató erő egyenlő leend a második esetben elfogyasztottal s az *A*-ból *B*-be az első esetben átment melegmennyiség is egyenlő lesz a második esetben *B*-ből *A*-ba visszament melegmennyiséggel ; olyannyira, hogy ilynemű váltakozó műveletet számtalanszor ismételhetnénk a nélkül, hogy végeredményben mozgató erőt létrehoztunk, vagy melegséget egyik testből a másikba átvittünk volna.

Ha most léteznék mód, a mely a most alkalmazottnál czélszerübb volna a melegség felhasználására, azaz, ha bármely módon is, de lehetséges volna a melegséggel nagyobb mozgató erőt létesiteni, mint műveleteink első sorában : elégséges volna, hogy ezen mozgató erő egy részét elvonjuk a végből, hogy a most leirt módon a melegséget *B*-ből *A*-ba felvigyük, azaz a hűtőből a katlanba, s hogy a dolgot a kezdetállapotba visszavigyük, s hogy előkészitsük a lehetőségét egy az elsőhöz teljesen hasonló ujabb műveletnek és így tovább : ez nem csak a perpetuum mobile létesitése lenne, hanem a mozgató erő korlátlan előállítása melegség vagy bármely

---

magasságban tartható, ha míg egyik oldalon víz folyik ki, a másikon ugyanannyi bejön.

A dolgot még úgy is gondolhatjuk, hogy *A* és *B* saját maguktól tartják meg hőmérsékleteiket változatlanul, jóllehet bizonyos melegmennyiséget nyer az egyik s veszít a másik. Ha pl. *A* cseppesülésnek induló gőz, *B* olvadásnak induló jég volna, mindketten képesek volnának meleget átadni illetőleg felvenni, a nélkül, hogy hőmérsékleteik változnának.

más ható fogyasztása nélkül. (IV.) Ez pedig teljesen ellenkezik a mechanika és az észszerű fizika törvényeivel: el nem fogadható.* Azt kell tehát következtetnünk, hogy «a vízgőz alkalmazásánál nyert mozgató erő maximuma a maximuma egyszersmind a bármely anyag alkalmazásánál nyerhető mozgató erőnek is.» Különben is ezen tételnek egy második, szigorúbb bizonyítását fogjuk adni nemsokára. Addig is vegyük csak úgy, mint megjegyzést.

A most felállított tételre nézve a következő kérdést lehet tenni: mi itt a maximum szónak értelme? Miről ismerjük meg, hogy ezen maximum el van érve? Miből fogjuk megtudni, hogy vajjon a mozgató erő előállítására a vízgőz alkalmazható-e a legelőnyösebben?

Miután a melegség egyensulyának minden kiegyenlítődése

---

* Azt vetné tán valaki ellen, hogy az örökmozgás, a melyről ki van mutatva, hogy csakis mechanikai erőkkel előállítása lehetetlen, talán lehetséges, ha a meleg vagy elektromosság hatásait veszszük; de felfoghatjuk-e a meleg- és elektromos tüneményeket másképen, mint a melyek a testek valamely mozgásából jöttek létre, s mint ilyenek nincsenek-e alávetve a mechanika általános törvényeinek? Másrészt nem tudjuk-e a posteriori, hogy minden kisérlet perpetuum mobilét létesíteni bármi módon is, meghiusult? Hogy sohasem sikerült valóban örökös mozgást létrehozni; azaz oly mozgást, a mely a használt testek megváltoztatása nélkül folyton történnék. Az elektromotoros készüléket is — Volta lánczát — már többször tekintették úgy, mint a mely képes örökös mozgást létrehozni; megpróbálták ezen eszme megvalósítását száraz elemek létesítése által, mint a melyek el nem változnak; azonban bármit csináltak is, a készülék érezhető elváltozásokat szenvedett, mihelyt bizonyos időn át bizonyos energiával működött.

A perpetuum mobile általános és filozofiai fogalma nem csak azt tartalmazza, hogy az első megindítás után örökké mozog; hanem valamely készülék vagy bármely szerkezet oly fajta működését, hogy képes mozgató erőt korlátlan mennyiségben kifejteni; képes minden testet nyugvó állapotából kizavarni, kitartósságukat megsemmisiteni; képes továbbá az egész mindenség megmozdítására szükséges erőt saját magából meríteni, azt mozgásban tartani, sőt mozgását gyorsítani. Ez a mozgató erő valóságos teremtése volna. Ha ez lehetséges volna, akkor nem kellene a mozgató erőt a víz- és légáramlásokban s a tüzelő anyagokban keresni; mérhetetlen forrás állna belőle rendelkezésünkre, a honnan tetszésünk szerint meríthetnénk.

mozgató erőt hozhat létre, minden kiegyenlítődés, a mely ily erő létrehozása nélkül megy végbe, valóságos veszteség gyanánt tekinthető: igen rövid elmélkedés elegendő annak belátására, hogy minden hőmérsékletváltozás, a mely nem a testek valamely térfogatváltozásából ered, csakis haszon nélkül való hőkiegyenlítődés lehet.* A maximum szükséges feltétele tehát az, hogy «a melegség mozgató erejének kifejtése czéljából használatba vett testekben semmi oly mérsékletváltozás ne történjék, a mely nem térfogatváltozásból eredt». Viszont minden esetben, a midőn eme feltétel teljesítve van, a maximumot elértük.

Ezen elvet a hőgépek szerkesztésénél soha sem szabad szem elől téveszteni, mert főképen ezen alapulnak. Ha nem is követhető szigorúan, legalább lehető kevéssé kell csak tőle eltérni.

Minden mérsékletváltozás, a mely nem térfogatváltozásból vagy chemiai hatásból ered (ez utóbbiról feltételezzük itt, hogy ki van zárva), az által jön létre, hogy a melegség melegebb testből hidegebbe megy át. Ezen átmenetel főleg különböző mérsékletű testek érintkezésekor történik: azért a mennyire lehetséges, ily érintkezést kerülni kell. Igaz, hogy teljesen el nem kerülhető; de legalább iparkodnunk kell, hogy az egymással érintkező testek mérsékletkülönbsége ne legyen nagy.

Előbbi bizonyításunkban feltételeztük, hogy A test melegsége által fejlesztünk gőzt, s hogy ezen gőz az A test hőmérsékleténél fejlődik, oly meleg mint A, tehát érintkezés csakis egyenlő hőmérsékletü testek közt történt; a gőz mérsékletének megváltozása, a kiterjedés, tehát térfogatváltozás folytán jött létre; s végre a megsürítés is a nélkül történt, hogy különböző mérsékletű testek jutottak volna érintkezésbe; azaz úgy, hogy a gőzt érintkezésbe hoztuk az ép oly mérsékletű B testtel s reá egyuttal állandó nyomást gyakoroltunk. A maximum feltételei tehát megvoltak. Tényleg a do-

* Feltételezzük, hogy a mozgató erő kifejtése czéljából használatba vett testek egymásra semmi chemiai hatást nem gyakorolnak. A kazánban történő vegyi folyamat csakis előfolyamat, nem a mozgató erő direkt létrehozására, hanem hogy a melegség egyensúlyát megbontsa, mérsékletkülönbséget, s ez azután mozgást hozzon létre.

log nem történik szigorúan úgy, mint a hogy feltettük. Hogy melegség mehessen át egyik testből a másikba, kell, hogy az első valamivel melegebb legyen; azonban ezen hőmérséklet-többletet oly kicsinynek vehetjük, a mint akarjuk; sőt elméletben semminek, a nélkül hogy okoskodásunk helytelenné válnék.

Bizonyításunkra sokkal komolyabb ellenvetést lehet tenni, s ez a következő:

A midőn gőzt fejlesztendők az *A* testtől melegséget vonunk el, s azután ezen gőzt a B testtel való érintkezés által megsürítjük, a víz, a melyből a gőz lett, előbb *A*-nak s végül *B*-nek mérsékletével bir; tehát lehült. Ha uj, hasonló műveletet akarunk végezni, ha uj mozgató erőmennyiséget akarunk ugyanezen készülékkel s ugyanezzel a gőzzel létrehozni, vissza kell állítani a kezdeti állapotot; vissza kell adni a víznek kezdeti hőmérsékletét. Ez kétségkivül igen könnyü, csak az *A* testtel kell érintkezésbe hoznunk; csak hogy ekkor már különböző mérsékletű testek közt van érintkezés, s így mozgató erő megy veszendőbe,* tehát lehetetlen volna a fordított műveletet végrehajtani, azaz visszaadni az *A* testnek azon melegséget a mely a víz melegítésére fordíttatott.

Ezen nehézség elkerülhető ha *A* és *B* test közt csak végtelen kis mérsékletkülönbség van; azon melegmennyiség, a mely szükséges, hogy a víznek előbbi hőmérsékletét visszaadjuk, hasonlóan végtelen kicsiny s a gőzfejlesztésre szükséges, minden esetre véges melegmennyiséghez képest elhanyagolható lesz.

Be lévén bizonyítva a tétel arra az esetre, a mikor a mérsékletkülönbség *A* és *B* test közt végtelen csekély, az általános esetre

* Ily fajta veszteség minden gőzgépben előfordul. Csakugyan a kazán táplálására szolgáló víz mindig hidegebb, mint a kazán vize; bennök tehát a melegség egyensúlyának kiegyenlítődése haszon nélkül megy végbe. Hogy ez csakugyan veszteséggel jár, beláthatjuk a posteriori, ha meggondoljuk, hogy lehetséges lett volna előre felmelegíteni a vizet, az által, hogy egy kis gőzgépben mint sürítővizet használtuk volna; oly kisebb gőzgépben, a melyet a kazán gőze hajt, s a melyben a sürítés a kazán és a főgép sürítőjének mérsékletei közt lévő valamely hőmérséknél eszközöltetik. A kisebb gép által előállított mozgató erő nem kerülne semmi melegkiadásba, mert mind az, a mit felhasznált, a sürítővízzel a kazánba menne.

is könnyen kiterjeszthető. Csakugyan, ha arról volna szó, hogy mozgató erőt létesítsünk a melegségnek *A* testből *Z* testbe való átvitele által, a mely utóbbi testnek hőmérséklete az *A*-étól nagyon különbözik, képzelhetnők a *B*, *C*, *D*.... testeknek egész sorát, a melyeknek mérsékletei az *A* és *Z* mérsékletei közt vannak s azokat oly módon választhatnók, hogy az *A* és *B*, *B* és *C*.... etc. közt lévő hőmérséklet-különbségek végtelen kicsinyek legyenek. Az *A*-ból jövő melegség a *Z*-be csak úgy juthatna, ha előbb *B*-n, *C*-n stb. menne át, s minden egyes ily átmenetnél mozgató erejének maximumát fejtené ki. A fordított műveletek mind lehetségesek volnának s a 11-ik lapon leirt okoskodás szigorúan alkalmazható lenne.

A mondottak után a melegség mozgató erejét meglehetős találóan a víz eséséhez hasonlíthatjuk: mindkettejüknek maximumjok van, a melyet tulhaladni nem lehet, bármilyen legyen is egy részről a víz erejét felvevő gép, vagy más részről az anyag, a mely a melegség hatásának kifejtésére szolgál. A víz esésének mozgató ereje a magasságtól s a víz mennyiségétől függ; a melegség mozgató ereje hasonlóan a melegség felhasznált mennyiségétől s attól függ, a mit «esése magasságának» nevezhetnénk,* más szóval azon testek mérsékletkülönbségétől, a melyek közt a melegcsere történik. A víz esésénél a mozgató erő szigorúan arányos a felső és alsó medencze niveaukülönbségével. A melegség esésénél szintén növekszik a mozgató erő a meleg és hideg testek hőmérsékletkülönbségével; ez kétségtelen; csak azt nem tudjuk, hogy arányos-e vele? Nem tudjuk például, hogy vajjon a melegség esése 100°-ról 50°-ra épen annyi mozgató erőt hoz-e létre, mint ha 50°-ról 0°-ra sülyed. Ezen kérdést később fogjuk elővenni.

Most a 13-ik lapon adott alaptétel második bizonyítását fogjuk eszközölni s általánosabb alakban fogjuk bemutatni. Ha rugalmas fluidumot hirtelen összenyomunk, mérséklete emelkedik; fordítva, ha kitágítjuk, lehűl. Ez egyike a kisérletileg legjobban

---

* Az itt tárgyalt anyag egészen új lévén, kénytelenek vagyunk szokatlan s talán nem egészen világos kifejezéseket használni.

bebizonyitott tényeknek: bizonyitásunk alapjává teszszük.* Ha előzetes összenyomás által megmelegitett gázt a kezdeti hőmérsékletére akarjuk lehűteni, a nélkül hogy térfogatát ujból változtatnók, melegséget kell tőle elvonnunk. Ezt úgy is végezhetnők, hogy abban a mértékben, a mint a gázt összenyomjuk, egyszersmind melegséget is vonunk el tőle, úgy hogy hőmérséklete állandó ma-

---

* A kisérleti tények, a melyek legjobban bizonyitják a gázak térfogatváltozásait, ha azokat összenyomtuk, vagy kitágitottuk, a következők:

1. A légszivattyú búrája alá tett hőmérőnek sülyedése, ha a búra levegőjét ritkitjuk; ezen sülyedés a Breguet-féle hőmérőn igen jól kivehető: 40—50 fokot is meghaladhat. A búrában képződő köd úgy látszik a vizgőz lecsapódásából keletkezik a lehülés folytán.

2. A tapló meggyúladása a légtűzszerszámban, a mely nem más, mint kis sürítő szivattyú a levegő gyors összenyomására.

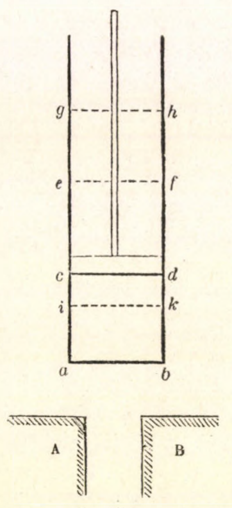
3. A hőmérő sülyedése oly edényben, a melyből az előzetesen összenyomott levegőt egy csap kinyitásával kibocsátjuk.

4. A hang sebességére vonatkozó kisérletek. Laplace kimutatta, hogy ha a theoriát és számitást a kisérleti eredménynyel összhangzásba akarjuk hozni, fel kell vennünk, hogy a levegő a hirtelen összenyomás által megmelegszik.

Csak egy kisérleti tény van, a mely ezekkel ellenkezni látszik; ezt Gay-Lussac és Welter irták le az «Annales de Chimie et de Physique»-ban. Ha nagy edényben levegőt nyomunk össze s egy kis nyiláson aztán kibocsátjuk, s a kiáramló levegő útjába egy hőmérő gömbjét teszszük, ez semmi lehülést sem mutat. Ezt kétféleképen magyarázhatjuk: először talán a nyilás széleihez surlódó levegő épen ezen surlódás által melegszik fel érezhető mértékben; vagy másodszor a hőmérő gömbjéhez ütköző levegő épen ezen ütközés, vagy jobban az által, hogy azt megkerülni kénytelen, eredeti sürüségét nyeri vissza; ép úgy mint a vizáram is magasabbra emelkedik, ha akadályra bukkan.

Azon tény, hogy a gázak térfogatuk változásával hőmérsékletváltozást is szenvednek, egyike a fizika legfontosabb tényeinek, mert sok következménynyel jár; egyszersmind a legnehezebben kimagyarázható s mérhető jelenségek közé tartozik. Némely körülmények közt valóban különös rendellenességeket mutat. Vajjon a légkör felső rétegeinek hidegségét nem annak kell-e tulajdonitanunk, hogy kitágulása közben lehült? Az ezen lehülésnek eddig adott magyarázatai épen nem kielégitők; azt mondták ugyanis, hogy a felső levegőrétegek a földtől csak kevés visszavert meleget nyernek, míg a világtérbe sokat kisugároznak; így tehát melegséget kell hogy veszítsenek, s hogy csak ez az oka a lehülésüknek; de ezen okoskodás nem áll meg, ha megjegyezzük, hogy egyenlő magasságokban nagy fennsíkok fölött ép oly, vagy még nagyobb hideg van, mint a hegyek csúcsain vagy a légkörnek más, a talajtól távol eső részein.

radjon. Nem különben a gáz megritkításánál is ki lehet kerülni mérsékletének csökkenését az által, hogy bizonyos melegmennyiséget közlünk vele. Az ily esetekben (a midőn semmi mérsékletváltozás nincs) felhasznált melegség «térfogatváltozásból létrejött melegség». Ebből azért még nem következik, hogy a melegség a térfogattal rokonságban állana; ép úgy, mint a nyomással sem; s ép oly joggal nevezhetnők «nyomásváltozásból létrejött melegségnek». Nem ismerjük a törvényeket, a melyek szerint a térfogatváltozás utján melegség jön létre: lehetséges, hogy a gáz természetével, sürüségével és mérsékletével változnak. A kiséret e tekintetben semmi felvilágosítást sem nyujtott; csak azt, hogy a rugalmas fluidumok összenyomása által kisebb-nagyobb melegmenynyiség fejlődik.



1. ábra.

Ezeket előrebocsátva, képzeljünk valamely rugalmas fluidumot, pl. levegőt hengeres edénybe (lásd 1. ábra) bezárva; ezen henger legyen *abcd*; s benne egy mozogható zárólap, vagy dugó, *cd* legyen; van azon kivül *A* és *B* test, a melyek mindegyike állandó hőmérsékleten van tartva, s vegyük, hogy *A* melegebb, mint *B*. Képzeljük most már a következő műveleteket: (V.)

1. Az *abcd* edényben lévő levegőt az *A* testtel érintkezésbe hozzuk; vagy elég ezen edény falát hozni az *A* testtel érintkezésbe, ha felteszszük, hogy a melegséget könnyen átbocsátja. Ez által a levegőnek ép olyan hőmérséklete lesz, mint *A*-nak; a dugó jelen helyzete *cd*.

2. A dugó fokozatosan emelkedik s *ef* helyzetbe jut; a levegő folyton érintkezik *A* testtel s a ritkulás folytán állandó hőmérsékletű marad; az *A* test szolgáltatja a hőmérséklet állandó tartására szükséges melegséget.

3. Az *A* testet eltávolítjuk s most a levegő semmi olyan test-

tel nem érintkezik, a melytől melegséget nyerhetne; de azért a dugó folytatja mozgását s *ef* helyzetből *gh*-ba jön. A levegő ritkul anélkül, hogy melegséget nyerne, tehát lehül. Képzeljük, hogy egészen *B* test mérsékletéig hül le; ekkor a dugó megáll és a *gh* helyzetet foglalja el.

4. A levegőt a *B* testtel hozzuk érintkezésbe; a dugót *gh*-ból *cd*-be toljuk vissza; ez által a levegő összenyomatik; de azért állandó marad hőmérséklete, mert *B* testtel érıntkezik, s a melegségét neki adja át.

5. A *B* testet távolítjuk most el, s folytatjuk a levegő összenyomását, a mely most már el lévén szigetelve, melegszik. Az összenyomást addig folytatjuk, mig a levegő az *A* test hőmérsékletét nem éri el. Ez alatt a dugó *cd*-ből *ik*-ba jön.

6. A levegőt ujra *A*-val hozzuk érintkezésbe, s a dugó az *ik* helyzetből *ef*-be megy vissza; a hőmérséklet nem változik.

7. A 3. pont alatti periodust ismételjük, azután egymásután a 4, 5, 6, 3, 4, 5, 6, 3, 4, 5 periodusokat és így tovább.

Mindezen műveletekben a hengerbe zárt levegő a dugóra kisebb-nagyobb erőt gyakorol; a levegő rugalmas ereje úgy a térfogat, mint a hőmérsékváltozások folytán ingadozik; azonban meg kell jegyeznünk, hogy egyenlő térfogatok esetén, azaz a midőn a dugó azonos helyzetekben van, a hőmérséklet magasabb a kitágulási mint az összenyomási mozgások alatt. Az elsőknél a levegő rugalmas ereje s így a kitágulási mozgások által létrehozott mozgató erő is nagyobb, mint az, a melyet a süritési mozgások létrehozása czéljából elfogyasztani kell. Igy a mozgató erő bizonyos többletét nyerjük, a melyet azután bármely tetszőleges czélra fordíthatunk. A levegő tehát hőgép gyanánt szolgált; még pedig a lehető legelőnyösebben, mert semmi haszon nélküli melegségkiegyenlítődés sem történt.

Mind eme leirt műveletek végrehajthatók akár fordított irányban is. Képzeljük, hogy a 6-ik periodus után, azaz a midőn a dugó *ef*-be jutott, az *ik* helyzetbe hozzuk, s ugyanakkor a levegőt *A* testtel érintkezésben tartjuk: az ezen testtől a 6-ik periodus alatt átvett melegség visszatér eredetéhez, azaz *A*-ba, s a dolog ott lesz, a hol az 5-ik periodus végén volt. Ha most eltávolítjuk *A* testet, s a dugót *ef*-ből *cd*-be mozgatjuk, a levegő hőmérséklete épen annyi fokkal fog sülyedni, mint a mennyivel az ötödik periodus alatt emelkedett s épen egyenlő lesz a *B*-ével. Mindenesetre végrehajtható tehát az előbb leirt műveleteknek egy forditott sorozata: elég, ha ugyanazon körülményeket véve fel minden periodusban felcseréljük a kitágulási és összenyomási mozgásokat.

Az első műveleteknek eredménye az volt, hogy bizonyos mozgató erőmennyiséget hoztunk létre s *A* testből *B*-be melegséget vittünk át; a forditott műveleteknek eredménye az lesz, hogy mozgató erőt fogyasztunk, s melegséget viszünk *B* testből *A*-ba vissza; oly annyira, hogy a műveleteknek eme két sorozata egymást megsemmisiti, közömbösiti.

Annak lehetetlensége, hogy melegség által nagyobb mozgató erőt hozzunk létre, mint műveleteink első sorozata által, most már könnyen kimutatható. Kimutatható pedig oly okoskodással, a mely a 11-ik lapon leirttal tökéletesen egyező. Sőt itt még szabatosabb; mert a mozgató erő létrehozására szolgáló levegőt minden műveletkör végén épen a kezdeti állapotába hoztuk vissza; a mi nem egészen így történt a vízgőzzel, a mint meg is jegyeztük.*

A melegség mozgató erejének kifejtésére eszközül a levegőt használtuk; azonban világos, hogy okoskodásunk ugyanaz marad bármely más gázra nézve is, sőt bármely oly más testre nézve is, a mely váltakozó kitágulás és összenyomás közben mérsékletét vál-

---

* Implicite felveszszük, hogy a midőn egy test bármely változást szenved, és hogy bizonyos számú változás után pontosan a kezdeti állapotába tér vissza, még pedig a mi a sürüséget, hőmérsékletét, halmazállapotát illeti, felteszszük, mondom, hogy ezen testben ép annyi melegmennyiség van, mint volt kezdetben; vagy másképen: hogy az ezen változások alatt felvett vagy átadott melegmennyiségek egymást pontosan egyensúlyozzák. Ezen tényt soha sem is vonták kétségbe; kezdetben csak felvették s csak később bizonyították sok esetre nézve kalorimetrikus kisérletekkel. Tagadni ezt egyértelmű volna az egész hőelmélet megdöntésével, a melynek épen alapjául szolgál. Különben, hogy megemlítsük, a hőelmélet föltételeit a legpontosabban meg kellene vizsgálni; mert a mostani állapotában több kisérleti tény majdnem megmagyarázhatatlannak látszik. (VI.)

toztatja; a mi egyértelmű azzal, hogy minden testre nézve, már legalább, a melyek alkalmasak, hogy velök a melegség mozgató erejét kifejtsük. Igy kimondhatjuk a következő általános tételt:

«A melegség mozgató ereje független a kifejtésére igénybe vett anyagoktól; mennyisége egyedül azon testek hőmérsékletei által van meghatározva, a melyek közt történik végső eredményben a melegség átvitele».

Alattomban értetődik, hogy minden módszer, a mely a melegség mozgató erejének kifejtésére szolgál, eléri azt a tökéletességet, a melyre képes; még pedig azon feltétel mellett, hogy, a mint fentebb megjegyeztük, a testekben semmi oly mérsékletváltozás ne történjék, a mely nem térfogatváltozásból eredt; vagy más szóval: egymástól érezhetőleg különböző testek közt soha se legyen érintkezés.

A mozgató erő létesitésének különféle módjait kapjuk különben akár különböző anyagok alkalmazásából, akár egy és ugyanazon anyagnak különböző állapotban való használatából, pl. egy gáznak kétféle sürüségben.

Ez persze érdekes vizsgálatokra vezet bennünket a légnemű fluidumok körül, a melyek azután a melegség mozgató erejére nézve uj eredményekre vezetnek, s megadják annak a lehetőségét, hogy némely külön esetre nézve a fentebb kimondott tétel helyességét igazoljuk.*

Megjegyezhetjük, hogy bizonyításunk egyszerüsíthető, ha az A és B testek hőmérsékleteit egymástól nagyon kevéssé különbözőknek veszszük fel. Akkor a dugó mozgásai a 3. és 5. periodusok alatt nagyon csekélyek lévén, ezen periodusokat elhagyhatjuk, a nélkül, hogy a mozgató erő létrehozására érezhető befolyást gyakorolnánk. Mert hát nagyon kis térfogatváltozás elegendő egy nagyon csekély hőmérsékletváltozásra, s a térfogatnak ezen kis változása a 4. és 6. periodusok mellett, a melyeknek kiterjedésük korlátlan, bátran elhanyagolható.

---

* Feltételezzük a következőkben, hogy az olvasó a jelenkori fizika legujabb eredményeivel, a mi a gázokat és a melegséget illeti, tisztában van.

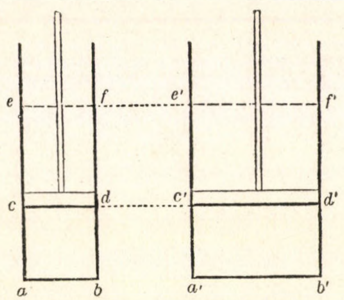
Ha tehát a fentebb adott műveletek sorozatából a 3. és 5. periodusokat kihagyjuk, a következő fog történni:

1. Az *abcd*-ben (lásd 2. ábra) lévő gáz érintkezik *A* testtel s a dugó *cd*-ből *ef*-be megy;

2. Eltávolitjuk az *A* testet, s a most már *abef*-ben helyet foglaló gázt *B*-vel hozzuk érintkezésbe; a dugó meg *ef*-ből *cd*-be tér vissza;

3. Most a *B*-t távolitjuk el, a gázt *A*-val hozzuk érintkezésbe, a dugó pedig *cd*-ből *ef*-be megy; azaz az első periodust ismételjük és így tovább.

Az 1. és 2. műveletekből létrejövő mozgató erő nem lesz más, mint a különbség az *A* test hőfokával biró gáz kiterjedése közben létrejött s a *B* test mérsékleténél történő összenyomás által elfogyasztott mozgató erők közt.



2. ábra. 3. ábra.

Tegyük fel, hogy az 1. és 2. műveleteket két különböző chemiai tulajdonságu anyagon hajtjuk végre; de ugyanazon nyomás alatt legyen mind a kettő, a közönséges levegőnyomás alatt például; egyenlő körülményeket véve fel, mind a két gáz tökéletesen egyformán fog viselkedni; azaz rugalmas erőik, ha kezdetben egyenlők voltak, azok is fognak maradni folyton, bárminőképen változzék is a térfogat és a hőmérséklet, ha különben ezen változás mind a két anyagra nézve ugyanaz. Ez Mariotte, Gay-Lussac és Dalton törvényeiből következik, a melyek minden rugalmas fluidumra nézve érvényesek, s a melyek szerint minden rugalmas fluidumnál a térfogatok, rugalmas erők és hőmérsékletek közt ugyanazon viszony áll fenn.

Mivel tehát két különböző minőségű, de ugyanazon hőmérsékletű s ugyanazon nyomás alatt lévő gáz egyenlő körülmények közt egyformán viselkedik, ha őket a fent leirt műveletek alá vetjük, egyenlő mozgató erőt kell, hogy hozzanak létre. Ez azonban az általunk felállított alaptétel értelmében feltételezi, hogy egyenlő melegmennyiségeket használtunk fel; vagyis más szóval, hogy az *A* testből *B*-be átmenő melegmennyiség ugyanaz volt, akár egyik, akár a másik gázt alkalmaztuk.

Az *A*-ból *B*-be átment melegmennyiség mindenesetre ép akkora, mint a melyet a gáz kiterjedése közben felvesz, vagy mint a mennyit később az összenyomás folytán átad. Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

«A midőn egy gáz, a nélkül hogy hőmérsékletét változtatná, bizonyos meghatározott térfogata és nyomása helyett uj, szintén meghatározott nyomást és térfogatot vesz fel, a felvett vagy átadott melegmennyiség mindig ugyanaz, bármilyen legyen is az alkalmazott gáz».

Vegyünk pl. 1 liter 100° meleg s egy légköri nyomás alatt lévő levegőt; ha térfogatát megkétszerezzük, de úgy, hogy azért hőmérséklete 100° maradjon, bizonyos melegmennyiséget kell vele közölnünk. Ezen melegmennyiség azonban ugyanaz marad, akár szénsav, akár nitrogén, hydrogén, vizgőz, vagy borszesz gőze a használt anyag; azaz ugyanaz, ha ezen gázok térfogatát 100° hőmérséklet s egy légköri nyomás mellett megkettőztetjük.

Épen ez, de ellenkező értelemben történik, ha a helyett hogy megkétszerezzük a gáz térfogatát, eredeti térfogatának felére nyomnók össze.

Azon melegmennyiséget, a melyet a rugalmas fluidumok térfogatuk változása közben átadnak vagy felvesznek, eddig még nem mérték meg direkt kisérlet segélyével; ezen kisérlet kétség kivül nehezen volna kivihető; van azonban adatunk, a mely majdnem annyit ér: ezen adatot a hangelmélet szolgáltatta; s nagyon megbizhatunk benne, mert szigorú okoskodás segélyével vezették le. Ime ebben áll:

A légköri levegő hőmérséklete 1°-kal emelkedik, ha térfogatát hirtelen összenyomással $\frac{1}{116}$-od részszel megkisebbítjük.*

* Poisson, a kitől ezen adat van, megmutatta, hogy elég jól megegyezik Clément és Desormes-nak kisérleti eredményeivel, a mely kisérletet ők a leve-

A hang sebessége körül végzett kisérletek a levegőnek 760 mm. nyomása és 6°-nyi hőmérséklete mellett történtek; adatunk csakis ezen két körülmény mellett áll fenn. Mégis könnyebbség okáért, 0°-ra vonatkoztatjuk, a mely úgy sincs messze tőle.

A térfogatának $\frac{1}{116}$-od részével összenyomott s ez által 1°-ra felmelegített levegő az 1°-ú levegőtől csakis sűrűségben különbözik. A kezdeti térfogat V volt, az összenyomás az egésznek $\frac{1}{116}$-od része, igy az új térfogat $V-\frac{1}{116}V$ lesz.

Az állandó nyomás mellett való felmelegités azonban GAY-LUSSAC törvénye értelmében $\frac{1}{267}$-ed résznyi térfogatnövekedéssel jár; tehát a levegő térfogata egy részről $V-\frac{1}{116}V$-re csökkentetett, más részről $V+\frac{1}{267}V$-re nagyobbittatott. (VII.)

A melegmennyiségek különbsége az első és második esetben nem lehet más, mint az, a mely szükséges a hőmérsékletnek 1°-kal való emelésére: igy tehát azon melegmennyiség, a melyet a levegő elnyel, a míg $V-\frac{1}{116}V$ térfogatról $V+\frac{1}{267}V$ térfogatra tágul, egyenlő avval, a mely 1°-kal való melegitésre kell.

Képzeljük most, hogy az állandó nyomás alatt lévő és szabadon tágulható levegőt oly edénybe zárjuk, a melyben nem tágulhat ki, s ekkor melegitjük fel 1°-kal. Az igy 1°-kal felmelegitett levegő az $\frac{1}{116}$-od részszel összenyomott levegőtől csak abban különbözik, hogy térfogata $\frac{1}{116}$-od részszel nagyobb. Igy tehát azon melegmennyiség, a melyet a levegő átad, ha térfogatának $\frac{1}{116}$-od részével összenyomjuk, egyenlő azzal, a mely szükséges, hogy állandó térfogat mellett 1°-kal felmelegitsük. Mivel a $V-\frac{1}{116}V$ és a $V+\frac{1}{267}V$ térfogatok különbsége magához a V térfogathoz képest csekély, azért, ha az elsőtől a második vagy az elsőtől a harmadik

gőnek légüres vagy megritkitott levegőjű térbe való áramlása felett végeztek. Meglehetősen egyezik még GAY-LUSSAC és WELTER némely adataival.

térfegatra megyünk át, az így elnyelt melegmennyiségeket a térfogatváltozásokkal szigorúan arányosaknak vehetjük. Tehát a következő viszony áll:

Állandó nyomás mellett a levegőnek 1°-kal való melegítésére szükséges hőmennyiség, azon hőmennyiséghez, a mely ugyanazon levegőnek 1°-kal állandó térfogat mellett való felmelegítésére kell, a következő viszonyban van:

$$\frac{1}{116}+\frac{1}{267}:\frac{1}{116}$$

vagy, ha mindkét oldalon 116×267-vel szorozunk, az arány a következő lesz: $267+116:267$.

Ez tehát a viszony, a mely a levegőnek az állandó nyomás- és az állandó térfogatra vonatkozó hőfoghatósága közt fennáll. Ha az elsőt egységül veszszük, akkor a másodikat a következő szám fejezi ki $\frac{267}{267+216}$ vagy körülbelül 0·7; különbségük $1-0{\cdot}7=0{\cdot}3$ nem lehet más, mint azon melegmennyiség, a mely a levegő térfogatának növelésére kell, a midőn azt állandó nyomás mellett 1°-kal felmelegítjük.

Gay-Lussac és Dalton törvénye szerint ezen térfogatváltozás minden gáznál ugyanaz; és a 23-ik lapon felállított tétel értelmében az egyenlő térfogatnagyobbodások alatt elfogyasztott meleg minden gázra nézve ugyanaz; ezeket egybevetve, a következő tételre jutunk:

«Az állandó nyomás és az állandó térfogat mellett vett fajlagos melegségek különbsége minden gáznál ugyanaz.»

Meg kell itt jegyeznünk, hogy minden gázt ugyanegy nyomásnál pl. 1 légköri nyomásnál veszünk, s azonkívül a fajlagos melegeket a térfogatokra viszonyítva mérjük.

Mi sem könnyebb most már, ha ismerjük a gázak fajlagos melegeit állandó nyomás mellett, mint táblázatba állítani össze az állandó térfogat mellett vett fajlagos melegeket. Itt adjuk eme táblázatot, a melynek első oszlopa Delaroche és Bérard kisérleteiből adódott, a melyeket az egy légköri nyomás alatt levő gázak fajlagos melegeit illetőleg végeztek, s a melyben a második oszlopot úgy nyertük, hogy az elsőnek illető adataiból 0·3-et levontunk.

A gázak fajlagos melegeinek táblázata.

A gáz neve	Fajlagos meleg állandó nyomás mellett	Fajlagos meleg állandó térfogat mellett
Levegő	1·000	0·700
Hydrogenium	0·903	0·603
Szénsav	1·258	0·958
Oxygenium	0·976	0·676
Nitrogenium	1·000	0·700
Nitrogenoxydul	1·350	1·050
Olajképző gáz	1·553	1·253
Szénoxyd	1·034	0·734

Mindkét oszlop adatai ugyanazon egységre vannak viszonyítva, és pedig a légköri levegőnek állandó nyomás mellett vett fajlagos melegségére. (VIII.)

Minthogy az első és második oszlopok megfelelő számai közt a különbség mindig ugyanaz, kell, hogy arányuk változó legyen: tehát az állandó nyomás és állandó térfogat mellett vett fajlagos melegségek aránya minden gáznál más.

Láttuk, hogy ha a levegőt térfogatának $\frac{1}{116}$-od részével hirtelen összenyomjuk, hőmérséklete 1°-kal emelkedik. A többi gázak is melegednek, ha őket épen így összenyomjuk; de nem mind egyenlően, hanem az állandó térfogat mellett való fajlagos melegeikkel fordított arányban. Mert felvettük, hogy a térfogatcsökkenés mindig ugyanaz, az ebből kifejlődő melegmennyiségnek is ugyanannyinak kell lennie, s az ebből létrejövő hőmérsékemelkedés csakis a gáznak az összenyomás után lévő fajlagos melegétől függ, még pedig, mint könnyen belátható, fordított arányban van vele. Könnyen összeállíthatjuk most már a különböző gázak mérsékletemelkedésének táblázatát az $\frac{1}{116}$-od résznyi összenyomásra viszonyítva.

A gázak összenyomásából létrejövő hőmérséklet-emelkedés táblázata.

A gáz neve	Hőmérséklet-emelkedés az $\frac{1}{116}$-od részszel való összenyomásnál
Levegő	1·000°
Hydrogenium	1·160°
Szénsav	0·730°
Oxygenium	1·035°
Nitrogenium	1·000°
Nitrogenoxydul	0·667°
Olajképző gáz	0·558°
Szénoxyd	0·955°

Ha újból összenyomnók ezen gázakat, azáltal, hogy térfogatukat $\frac{1}{116}$-od részszel kisebbítenők, hőmérsékletük ismét emelkednék, még pedig közel ugyanannyival; de már a 3-ik, 4-ik, ... 100-adik összenyomásnál másképen volna; mert ezen gázak hőfoghatósága térfogatukkal változik, s nagyon lehetséges, hogy még a hőmérsékletükkel is.

Most a 21-ik lapon adott általános tételből egy másodikat fogunk levezetni, a mely a most levezetettnek kiegészítéseül szolgál.

Képzeljük e végre, hogy az *abcd* hengeralakú edényben (2. ábra) lévő gázt *a'b'c'd'* edénybe (3. ábra) vezetjük, a mely az elsővel egy magasságú, de alapja nagyobb: a gáz térfogata ez által nagyobb lesz, sűrűsége és rugalmas ereje pedig kisebb, még pedig a két *abcd* és *a'b'c'd'* térfogat fordított arányában. A mi a dugókra, *cd*-re és *c'd'*-re gyakorolt nyomást illeti, az mind a két esetben ugyanaz marad, mert ezen dugók felülete a térfogatokkal egyenes arányban van.

Vegyük most fel, hogy az *a'b'c'd'*-ben lévő gázon ugyanazon műveleteket hajtjuk végre, mint az *abcd*-ben lévővel tettük; vagyis vegyük fel, hogy a *c'd'* dugóval ép oly amplitudójú mozgásokat végeztessünk, mint előbb *cd*-vel; hozzuk egymás után *c'd'* helyzetbe, a melynek az előbbi esetben *cd* felelt meg, azután *e'f'*-be, a melynek *ef*; azonkívül az *A* és *B* testek segélyével a gáznak hőmérsékletét ép úgy változtassuk, mint előbb *abcd*-ben: a dugóra gyakorolt összes erő mind a két esetben a megfelelő pillanatokban ugyanaz leend. Ez egyedül Mariotte törvényéből következik; * csakugyan, mivel a két gáz sűrűsége a dugók hasonló helyzeteiben mindig ugyanazon viszonyban van egymáshoz, s mivel a hőmérséklet mind a kettőnél egyenlő, a dugókra gyakorolt összes nyomások is mindig ugyanazon arányban maradnak egymáshoz. Ha bármely pillanatban ezen arány az egységgel egyenlő, a nyomások mindig egyenlők lesznek.

Mivel különben a két dugó mozgásai egyenlő amplitudóval birnak, a mindkét részről kifejtett mozgató erők is egyenlők lesznek; a miből a 21-ik lapon adott tétel értelmében az következik, hogy mind a két esetben ugyanazon melegmennyiséget használtunk fel, azaz mind a két esetben ugyanannyi melegmennyiség megy *A*-ból *B*-be át.

Mivel pedig az *A* által átadott s a *B* által felvett melegség nem más, mint a gáz ritkítása által elnyelt s később az összenyomás folytán visszaadott melegség, kimondhatjuk a következő télelt:

«A midőn rugalmas fluidum hőmérsékletének változtatása nélkül *U* térfogata helyett *V*-t vesz fel, s ugyanannak a gáznak ugyanannyi mennyisége ép oly mérséklet mellett szintén *U'* térfogatból *V'*-re megy át, s ha *U*-nak aránya *V*-hez ép annyi, mint *U'*-nak aránya *V'*-hez: a két esetben elnyelt vagy visszaadott melegmennyiségek egyenlők lesznek.»

---

* Mariotte törvénye, a melyre bizonyításunkban támaszkodunk, egyike a legjobban bebizonyított természeti törvényeknek. Több elmélet alapjául szolgált már, a melynek helyességét, kisérletileg is bebizonyították, a mi viszont az alapul felvett törvény helyességét bizonyítja. Felhozhatjuk Dulong és Petit kisérleteit, mint Mariotte s még Gay-Lussac és Dalton törvényeinek kitünő bizonyítóit. (Lásd: «Annales de Chimie et de Physique, 1818 február, VII. kötet, 122. lapon). Még Davy és Faraday újabb kisérleteit is megemlíthetjük.

Azon tételek, a melyeket itt levezetünk, talán nem lennének szabatosak, ha a sűrűség vagy a hőmérséklet bizonyos határain kívül alkalmaznók; csakis azon határokon belül tekintendők érvenyeseknek, a melyeken belül Mariotte, Gay-Lussac és Dalton törvényei is azok.

Ezen tételt még más módon is mondhatjuk ki:

«A midőn valamely gáz hőmérsékletének változtatása nélkül térfogatváltozást szenved, az ezen gáz által elnyelt vagy kiadott melegmennyiségek számtani sort adnak, ha a térfogatváltozások mértani sort képeznek.»

Ha egy liternyi 10° hőmérsékletű levegőt $\frac{1}{2}$ liternyi térfogatra nyomunk össze, bizonyos melegmennyiség fejlődik; ezen melegmennyiség ugyanaz marad, ha a térfogatot újból $\frac{1}{2}$ liternyiről $\frac{1}{4}$ re, $\frac{1}{4}$-ről $\frac{1}{8}$-ra és így tovább kisebbítjük.

Ha a helyett, hogy összenyomnók a levegőt, kitágítjuk egymás után 2, 4, 8, etc. liternyire, mindig ugyanannyi melegmennyiséget kell vele közölnünk, hogy hőmérséklete az eredeti fokon maradjon. (IX.) Ez igen jól okát adja azon magas hőmérsékletnek, a melyet a levegő nyer, ha hirtelen összenyomjuk. Tudjuk, hogy ezen hőmérséklet elegendő a tapló meggyújtására, sőt még hogy a levegő izzásba is jöjjön. Ha egy pillanatra felteszszük, hogy a levegő fajlagos melege, daczára a mérséklet- és térfogatváltozásnak, állandó marad, a hőmérséklet számtani sorban fog nőni, ha a térfogatcsökkenés mértani sort képez. Ebből, s még abból, hogy 1°-nyi mérsékletemelkedés $\frac{1}{116}$-od résznyi összenyomásnak felel meg, kiindulva igen könnyen nyerjük, hogy az eredeti térfogatának $\frac{1}{14}$-ed részére összenyomott levegő körülbelül 300°-nyira melegedik fel, a mi már a tapló meggyújtására elégséges.*

---

* Ha a térfogat $\frac{1}{116}$-od részével kisebbedik, vagyis az eredetinek $\frac{115}{116}$-od részévé válik, a hőmérséklet 1°-kal emelkedik.

Újabb kisebbítés ugyancsak $\frac{1}{116}$-od részszel s a térfogat $\left(\frac{115}{116}\right)^2$ lesz és a hőmérséklet újra 1°-kal emelkedik.

x számú ilyen térfogatkisebbedés után a térfogat $\left(\frac{115}{116}\right)^x$ lesz, s a hőmérséklet x számú fokkal emelkedett.

Ha most $\left(\frac{115}{116}\right)^x = \frac{1}{14}$ teszszük, s mindkét oldalnak logarithmusát veszszük, azt találjuk, hogy $x = 300°$-kal közelítőleg.

Ha $\left(\frac{115}{116}\right)^x = \frac{1}{2}$ tesszük, $x = 80°$ lesz. A mi azt mutatja, hogy a

A hőmérséklet emelkedése még nagyobb lesz, ha a levegő hőfoghatósága abban a mértékben csökken, a mint térfogata kisebbedik; ez pedig feltehető; sőt azon kisérletekből, a melyeket Delaroche és Bérard a levegőnek különböző sűrűségekre vonatkozó fajlagos melegei körűl végeztek, úgy látszik, ez következik. (Lásd az «Annales de Chimie»-ben közlött dolgozatot. LXXXV. kötet, 72, 224. lap.

A 23. és 29. lapon közlött tételek elégségesek a rugalmas fluidumok térfogatváltozásai közben elnyelt vagy szabaddá lett meleg-mennyiségeknek egymás közt való összehasonlítására; bármi legyen is különben ezen fluidumok sűrűsége és chemiai természetök, feltéve, hogy bizonyos változatlan hőmérsékletük van; azonban ezen tételek semmi módot sem nyújtanak azon melegmennyiségek egymás közt való összehasonlitására, a melyek oly rugalmas fluidumok térfogatváltozásai közben nyeletnek el vagy válnak szabadokká, a melyeknek hőmérséklete változik. Így nem tudjuk, minő viszony van azon melegmennyiség közt, a mely fejlődik, ha egy liternyi levegőt felére összenyomunk s közben a hőmérsékletét állandóan 0°-on tartjuk s azon melegmennyiség közt, a mely ugyancsak egy liternyi levegőnek felére való összenyomásakor fejlődik, ha közben a hőmérséklete folyton 100°-on van tartva. Ezen viszony ismerete a gázak különböző hőmérsékletnél való fajlagos melegségének ismeretéhez van kötve, s még néhány egyéb adathoz, a melyet a mai fizika még nem ad meg.

Tételeink másodika módot nyujt felismerni, hogy mily törvény szerint változik a gázak fajlagos melege a sűrűségükkel.

Vegyük fel, hogy a 21-ik lapon leirt műveleteket nem végtelen kis mérsékletkülönbséggel biró A és B testek segélyével hajtjuk végre, hanem olyan testekkel, a melyeknek mérsékletei közt

---

felére összenyomott levegő körülbelül 80°-kal melegedik fel. Mindezekre nézve feltételeztük, hogy a fajlagos meleg a térfogattal nem változik; de ha a következő lapokon adott okok miatt a felényi térfogatra összenyomott levegő fajlagos melegét 700 : 616 arányban kisebbnek vesszük, a 80°-ot még $\frac{700}{616}$-tal kell szoroznunk, s akkor az eredmény 90° lesz (közelítőleg).

véges különbség van, 1° például. Egy teljes művelet-cyklusban az A test a rugalmas fluidumnak bizonyos melegmennyiséget ad át, a melyet két részből állónak gondolhatunk: 1. az, a mely szükséges, hogy a fluidumot kiterjedése alatt folyvást állandó hőmérsékleten tartsuk; 2. azon melegség, a mely arra kell, hogy a fluidum a B test mérsékletéről az A test mérsékletére térjen vissza, a midőn eredeti térfogatára visszavezetve az A testtel hozzuk érintkezésbe. Legyen ezen mennyiségek elseje a, a másodika b; az A által átadott összes melegség pedig $a+b$.

Azon melegség, a melyet a fluidum B-nek átad, szintén két részre bontható; az első b' a gáznak B által való lehűtéséből jön; a másik a', a melyet a gáz térfogatának csökkenése folytán ad ki. Ezen két mennyiség összege $a'+b'$, s kell, hogy $a+b$-vel egyenlő legyen; mert egy teljes művelet-cyklus után a gáz teljesen visszatér eredeti állapotába. Minden nyert melegséget át kellett adnia. Tehát

$$a+b=a'+b' \text{ vagy } a-a'=b'-b \ldots . \text{(X.)}$$

Azonban a 29. lapon lévő tétel szerint az a és a' mennyiségek a gáz sürűségétől függetlenek, feltéve, hogy a gázmennyiség ugyanaz marad, s a térfogatváltozások az eredeti térfogattal arányosak. Az $a-a'$ különbségnek ugyanazon feltételeknek kell megfelelnie s így a $b'-b$-nek is, a mely vele egyenlő. Mivel azonban b' nem más, mint az $abcd$-ben (2. ábra) lévő gáznak 1°-kal való melegitésére szükséges melegség; b' azon melegség, melyet a gáz átad a midőn $abef$-ben 1°-kal lehül; ezen mennyiségek a fajlagos melegek mértékéül szolgálhatnak. Igy tehát a következő tételt mondhatjuk ki:

«A gáz fajlagos melegének változása térfogatának megváltozása folytán csakis az eredeti s az uj térfogat közt lévő viszonytól függ.» Vagyis, hogy a fajlagos melegek különbsége nem függ a térfogatok absolut nagyságától, hanem csak viszonyuktól.

Eme tételt még így is mondhatjuk ki:

«Ha valamely gáz térfogata mértani sorban nő, akkor fajlagos melege számtani sorban növekszik.»

E szerint, ha valamely adott sürüségnél a levegő fajlagos melegsége a, s fél akkora sürüségnél $a+h$, akkor negyedrésznyi sürüségnél $a+2\,h$, nyolczadrésznyi sürüségnél $a+3\,h$ lesz a fajlagos melegsége és így tovább.

Itt a fajlagos melegségek a sulyra vannak viszonyítva; állandó térfogat mellett vettük azokat; azonban, a mint látni fogjuk, ugyanazt a törvényt követik akkor is, ha állandó nyomásnál veszszük őket.

Mi az oka hát annak, hogy az állandó nyomás és az állandó térfogat mellett vett fajlagos melegségek különbözők? Az, hogy az első esetben a térfogat nagyobbítására melégség kell. Mert MARIOTTE (XI.) törvénye értelmében egy gáz bizonyos mérsékletváltozásának megfelelő térfogatváltozása az eredeti térfogatnak bizonyos meghatározott törtrésze kell, hogy legyen, a mely a nyomástól független. A 29. lapon lévő tétel szerint, ha a régi s az uj térfogat viszonya adva van, a térfogat megnagyobbítására szükséges melegség is meg van határozva; mert csak is ezen viszonytól s a gáz tömegétől függ. Következik tehát:

«Az állandó nyomás és állandó térfogat mellett vett fajlagos melegek különbsége mindig ugyanaz, bármi legyen is a gáz sürüsége, feltéve, hogy a mennyisége állandó.»

Mind a két fajlagos melegség azon mértékben növekedik, a melyben a sürüség csökken, de különbségük nem változik.*

---

* GAY-LUSSAC és WELTER kisérleteik útján, a melyek a «Mécanique céleste»-ben s az «Annales de Chimie et de Physique»-ben (1822 jul., 267. lap) meg vannak említve, találták, hogy az állandó nyomás és az állandó térfogat mellett vett fajlagos melegségek aránya a gáz sűrűségével igen kevéssé változik. A mint láttuk, a különbségnek kell állandónak maradnia, nem a viszonynak. A mint különben is a gázak fajlagos melege bizonyos adott tömeg mellett a sűrűséggel igen kevéssé változik, könnyen belátható, hogy maga a viszony csak nagyon kis változásoknak van alávetve. A levegő állandó nyomás és állandó térfogat mellett vett fajlagos melegeinek viszonya GAY-LUSSAC és WELTER szerint 1·3748, s majdnem állandó bármely nyomás és mérsékletnél. Mi más okoskodással a $\frac{267+116}{267}=1{\cdot}44$ számot nyertük, a mely attól csak $\frac{1}{20}$-ad részszel tér el; s ennek segélyével a gázak állandó térfogat mellett vett fajlagos melegeire táblázatot állítottunk össze. Nem kell ezen táblázatot nagyon pontosnak gondolnunk, valamint a 34. lapon lévőt sem. Főleg azért vannak, hogy azon törvényeket, a melyeket a légnemű fluidumok fajlagos melegei követnek, szemlélhetőkké tegyük.

Mivel tehát a két hőfoghatóság különbsége nem változik, ha az egyik számtani sorban nő, a másiknak is ép oly módon kell növekednie: törvényünk alkalmazható az állandó nyomás mellett vett fajlagos melegségre is.

Hallgatagon felvettük, hogy a fajlagos melegség a térfogattal nő. Ezen növekedés Delaroche és Bélard kisérleteiből következik: csakugyan ezen fizikusok azt találták, hogy az 1 méternyi kénesőoszlop nyomása alatt lévő levegő fajlagos melege 0·967 (lásd a már említett dolgozatot), ha egységül ugyanazon sulyu gáznak 0·760 m-nyi nyomásnál lévő fajlagos melegségét veszszük.

Azon törvény szerint, a mely a fajlagos melegség és a nyomás közt fennáll, elégséges, ha csak két külön esetben vizsgáljuk őket s ebből minden esetre nézve következtethetünk: így tehát felhasználván Delaroche és Bélard most említett kisérleti eredményét, a levegő különböző nyomásokra viszonyított fajlagos melegségeinek következő táblázatát állítottuk fel.

A táblázatban, a mint látható, (lásd a túloldalt) az első oszlop mértani sort képez, mig a másodiknak számai számtani sort adnak.

A táblázatot végletekig menő ritkitások- és összenyomásokig terjesztettük ki. Hihető, hogy a levegő, még mielőtt sürüsége 1024-szer nagyobb lenne, vagyis sürübb, mint a víz, már megcseppesül. A fajlagos melegek 0-vá lennének, sőt negativokká, ha a táblázatot az utolsó tagon túl folytatnók. Különben is gyanítjuk, hogy a második oszlop számai itt tulságos gyorsan csökkennek. A számításunk alapjául szolgáló kisérletek nagyon is szük határok közt végeztettek arra nézve, hogy nagy pontosságot érhessünk el a számításban, főleg a mi a szélső értékeket illeti.

Mivel most már ismerjük egyrészt a törvényt, a mely szerint a gázak összenyomásából melegség fejlődik, másrészt azt a törvényt is, a mely a fajlagos melegnek a térfogattal való változását adja, könnyen kiszámithatjuk a gázak hőmérsékletének emelkedését azon esetben, ha úgy nyomjuk azokat össze, hogy melegséget kifelé át ne adhassanak.

Nyomás atmosférákban	Fajlagos melegség, ha a levegőé 1 atm. nyomásnál = 1	Nyomás atmosférákban	Fajlagos melegség, ha a levegőé 1 atm. nyomásnál = 1
$\frac{1}{1024}$	1·840	1	1·000
$\frac{1}{512}$	1·756	2	0·916
$\frac{1}{256}$	1·672	4	0·832
$\frac{1}{128}$	1·588	8	0·748
$\frac{1}{64}$	1·504	16	0·664
$\frac{1}{32}$	1·420	32	0·580
$\frac{1}{16}$	1·336	64	0·496
$\frac{1}{8}$	1·252	128	0·412
$\frac{1}{4}$	1·165	256	0·328
$\frac{1}{2}$	1·084	512	0·244
1	1·000	1024	0·160

Ugyanis az összenyomást a következő két müveletre bontva gondolhatjuk: 1. összenyomás állandó hőmérséklet mellett; 2. a kiadott melegségnek visszavitele. Ezen második művelet folytán a hőmérséklet emelkedni fog, még pedig fordított arányban a gáznak térfogatcsökkenése után lévő fajlagos melegségével, a melyet a fent adott törvény szerint számíthatunk ki.

Az összenyomásból származó melegséget a 29. lapon lévő tétel értelmében a következő egyenlet fejezi ki

$$s = A + B \log v$$

a hol s ezen melegséget, v a gáznak az összenyomás után lévő térfogatát, A és B pedig két tetszőleges állandót jelent, a melyek a gáz eredeti térfogatától, a nyomástól, s a választott egységektől függnek.

A térfogattal változó fajlagos melegséget pedig az előbb felállított törvény értelmében a következő képlet adja

$$z = A' + B' \log v$$

a hol A' és B' két, az A és B-től különböző tetszőleges állandó.

A gáznak az összenyomásából keletkező mérsékletemelkedése arányos az $\frac{s}{z}$ viszonynyal, mely megint csak $\frac{A+B\log v}{A'+B'\log v}$. Kifejezhető magával ezen viszonynyal; így ha a mérséklet emelkedését t-vel jeleljük $t = \frac{A+B\log v}{A'+B'\log v}$.

Ha felveszszük, hogy a gáz kezdeti téfogata $=1$, s kezdeti hőmérséklete 0°, akkor $t=0$, $\log v=0$ $A=0$. S ekkor t nemcsak a hőmérséklet emelkedését, hanem magát a 0 pont felett lévő hőmérsékleti fokok számát is fejezi ki.

Nem szabad azonban hinnünk, hogy ezen képlet tán a gázak igen nagy térfogatváltozásai esetén is alkalmazható. Feltételeztük, hogy a hőmérséklet emelkedése a fajlagos melegséggel fordított arányban van; a miben implicite az foglaltatik, hogy a fajlagos melegség minden hőmérsékletnél állandó. Azonban nagy térfogatváltozások nagy mérsékletváltozásokat hoznak létre, és semmi sem biztosít bennünket arról, hogy a fajlagos melegség különböző fokoknál ugyanaz, főkép, ha ezen hőmérsékleti fokok egymástól igen messze vannak.

Ezen állandóság csak hypothezis, a melyet a gázakra nézve az analogia értelmében felvettünk, s a mely a szilárd és folyékony testekre nézve bizonyos hőmérsékleti határok közt meglehetősen áll; de a melyről Dulong és Petit kimutatták, hogy nem áll pontosan fenn, ha a hőmérséklet messze 100°-on felül növekedik.* (XII.)

---

* Nincs rá okunk a priori föltételezni, hogy a testeknek fajlagos melegsége különböző mérsékleteknél állandó; vagyis nem vehetjük fel, hogy egyenlő

Clément és Desormes egyik kisérleti törvénye értelmében, a vízgőz, bármily nyomás alatt fejlesztetett is, egyenlő suly mellett egyenlő melegmennyiséggel bir; vagy, a mi egyre megy, hogy ha a vízgőzt melegveszteség nélkül mechanikailag összenyomjuk, vagy kitágítjuk, telített marad, ha kezdetben is telített volt. Az ily vízgőz tehát állandó gáz gyanánt tekinthető, s azoknak törvényeit követi. Igy a $t=\frac{A+B\log v}{A'+B'\log v}$ képlet is alkalmazható reá, s a Dalton kisérleteiből nyert nyomási táblázattal is összhangzásban van. Meggyőződhetünk, hogy képletünk a kisérleti eredményekhez igen közel álló értéket ad, ha az A és B tetszőleges állandókat kellőképen választjuk meg. Az előforduló csekély eltérések nem nagyobbak, mint a megfigyelések hibái.*

---

melegmennyiségek a testek hőmérsékletét egyenlően változtatják, még ha a test sem állapotát, sem sűrűségét sem változtatná; mint pl. ki nem táguló edénybe zárt rugalmas fluidum. Direkt kisérletekkel kimutatták a szilárd és folyékony testekre nézve, hogy 0 és 100 fok között a hőmérséklet a melegmennyiséggel majdnem teljesen arányosan változik; azonban Dulong és Petit újabb kisérletei (lásd «Annales de Chimie et de Physique», 1818 febr. márcz. ápril.) megmutatták, hogy ez messze 100°-on felül nincs úgy, akár kénesőakár léghőmérőn mértük is a hőmérsékletet.

Nemcsak nem marad a fajlagos melegség a különböző mérsékleteknél állandó, hanem különböző értékei közt az arány sem változatlan, úgy hogy semmiféle hőmérőskála sem tudná az összes fajlagos melegségek állandóságát adni. Érdekes lett volna megvizsgálni, ha vajjon ugyanoly szabálytalanság a gáznemű anyagoknál is van-e; azonban ezekre nézve a kisérletek kivitele majdnem legyőzhetetlen nehézségekbe ütközik.

A szilárd testek fajlagos melegségének szabálytalansága, úgy látszik, bizonyos lappangó melegségnek tulajdonítható, a mely az olvadás megkezdésére, a testnek meglágyitására kell, még sokkal előbb, mintsem a teljes olvadás beállna. Ezen véleményt a következő megjegyzéssel támogatjuk: Dulong és Petit ugyanazon kisérletei szerint, a fajlagos melegség növekedése a hőmérséklettel sokkal gyorsabb a szilárd testekben, mint a folyékonyakban, jóllehet emezeknek kitágulása nagyobb. Ha csakugyan ez a szabálytalanság oka, akkor a gázaknál eme szabálytalanságnak nem szabad meglennie.

* Hogy az A, B, A' és B' állandókat a Dalton táblázatának eredményeiből meghatározhassuk, ki kell előbb számítani a gőz térfogatát nyomása- és mérsékletéből, a mi Mariotte és Gay-Lussac törvényei segélyével igen könnyű, ha a vízgőz mennyisége ismeretes.

Visszatérünk most főtárgyunkra, a melytől már ugyancsak eltávoztunk, t. i. a melegség mozgató erejére.

Megmutattuk, hogy a melegségnek egyik testből a másikba való átvitelekor kifejlődő mozgató erőmennyiség csakis a testek hőmérsékletétől függ; de nem ismertettük a viszonyt, a mely ezen hőmérséklet és mozgató erőmennyiség közt fennáll. Első tekin-

---

A térfogatot a $$v = c\frac{267 + t}{p}$$ egyenlet adja, a melyben v a térfogat, t a hőmérséklet, p a nyomás, s c állandó mennyiség, a mely a gőz súlyától s a választott egységektől függ. Ime a különböző mérsékletnél s így különböző nyomás alatt fejlesztett gőz egy grammnyi mennyiségének térfogatai:

t	p a nyomás a kéneső-oszlop magassága által mm.-ekben kifejezve.	v az egy gramm gőz térfogata literekben.
0°	5·060 mm.	185·0 l.
20°	17·32 «	58·2 «
40°	53·00 «	20·4 «
60°	144·6 «	7·96 «
80°	352·1 «	3·47 «
100°	760·0 «	1·70 «

Ezen táblázat két első oszlopa Biot «Traité de Physique»-jéből (I. köt. 272., 531. lap) van véve. A harmadik a fentebb közölt képletből van kiszámítva, azon adat felhasználásával, hogy a víz gőzállapotban egy légköri nyomás mellett 1700-szor annyi helyet foglal el, mint folyékony állapotában.

Az első és harmadik oszlop három megfelelő adatából igen könnyen meghatározhatjuk a
$$t = \frac{A + B \log v}{A' + B' \log v}$$
egyenlet állandóit. A nélkül, hogy eme számítás részleteit közölnök, csak az eredményeket adjuk:
$$A = 2268 \qquad A' = 19{\cdot}64$$
$$B = -1000 \qquad B' = 3{\cdot}30$$
Ezek meglehetősen megfelelnek a feltételeknek, úgy hogy az egyenletünk a következő leend:
$$t = \frac{2268 - 1000 \log v}{19{\cdot}64 + 3{\cdot}30 \log v}$$
s igen megközelítőleg adja a vízgőz térfogata és hőmérséklete közt lévő összefüggést.

Megjegyezhetjük még, hogy B' mennyiség positiv és igen kicsiny, a mi megerősíteni látszik azon tételünket, mely szerint a rugalmas fluidumok fajlagos melegsége a térfogattal nő, de csak lassan.

tetre természetesnek látszanék azt télelezni fel, hogy egyenlő mérsékletkülönbségek esetén a létrejövő mozgató erő mennyiségei is egyenlők lesznek; vagyis például, a midőn bizonyos melegmennyiség 100°-ú *A* testről 50°-ú *B* testbe megy át, épen annyi mozgató erő fejlődik, mint a midőn ugyanannyi melegmennyiség az 50°-ú *B* testből 0°·ú *C* testbe megy át. Ilyféle törvény igen érdekes volna, de nincs elégséges okunk rá, hogy a priori feltételezzük. Szigoruan meg fogjuk tehát a dolgot vizsgálni.

Képzeljük e végre, hogy a 21. lapon leirt műveleteket a levegőnek sulyra és térfogatra egyenlő két mennyiségével hajtjuk végre, csak a mérsékleteik különbözők; képzeljük továbbá, hogy mind a két esetben az *A* és a *B* testek közt ugyanazon hőmérsékletkülönbség van: úgy hogy pl. az egyik esetben a mérsékletek 100° és 100°—*h* lesznek, (a hol *h* végtelen csekély) a másik esetben pedig 1° és 1°—*h*. Mind a két esetben a keletkező mozgató erőmennyiség nem lesz más, mint a különbség a gáz által kitágulása közben kifejtett s később az eredeti térfogatára való összenyomására felhasznált mozgató erők közt. Mivel pedig ezen különbség, a mint igen könnyen meggyőződhetünk, mind a két esetben ugyanaz: így tehát a kifejtett mozgató erők is egyenlők.

Hasonlítsuk most össze a két esetben felhasznált melegmennyiségeket. Az első esetben elhasznált melegmennyiség nem más, mint az, a melyet az *A* test átad a levegőnek, hogy az kiterjedése közben 100°-nyi mérsékletét megtarthassa; a második esetben pedig az, a melyet ugyanazon test átad a levegőnek, hogy az a megfelelő kiterjedése alatt 1°-nyi mérsékletét megtarthassa. Ha ezen két melegmennyiség egyenlő volna, az valóban az előbb felvett törvényünk helyességét mondaná ki. De semmi sem mutatja, hogy ez így van; sőt mindjárt látni fogjuk, hogy ezen két melegmennyiség kölönböző.

Vegyük ugyanis fel, hogy a levegő *abcd* teret (2. ábra) foglalja el, s hogy mérséklete 1°; ezen levegő kétféle módon foglalhatja el az *abef* teret s vehet fel 100°-nyi mérsékletet:

1. Oly módon, hogy térfogatának változása nélkül melegítjük s azután kitágítjuk, hőmérsékletét folyton ugyanazon fokon tartva.

2. Oly módon is, hogy előbb kitágítjuk, mérsékletét állandóan tartva, s csak új térfogatának felvétele után melegítjük.

Legyen az első esetben elhasznált két melegmennyiség a és b; a' és b' a második esetben elhasznált melegmennyiségek; mivel a végső eredmény mind a két műveletnél ugyanaz, az elhasznált melegmennyiségek egyenlők lesznek. (XIII.)

$$a+b=a'+b'$$

a honnan

$$a'-a=b-b'$$

a' azon melegmennyiség, a mely a gáz hőmérsékletének 1°-ról 100°-ra való emelésére kell, a midőn a gáz *abef* helyet foglalja el. a azon melegmennyiség, a mely a gáz mérsékletének 1°-ról 100°-ra való emelésére szükséges, ha a gáz az *abcd*-ben van.

A levegő sürüsége az első esetben kisebb, mint a másodikban, s Delaroche és Bérard-nak a 30. lapon már említett kisérletei szerint fajlagos melegsége nagyobb valamivel az első esetben; a' tehát nagyobb, mint a, így b is nagyobb b'-nél. Ha tehát a tételt általánosítjuk, mondhatjuk:

«A gázak térfogatváltozásából létrejövő melegmennyiség annál nagyobb, minél magasabb a hőmérséklet.»

Vagyis pl. bizonyos mennyiségű levegőnek, a melynek térfogatát megkétszerezzük, 100°-nyi mérsékleten való tartására szükséges melegség mindig több, mint az, a mely ugyanannyi levegőnek ép oly kitágulás mellett 1°-nyi mérsékleten való tartására kell.

Mégis, a mint láttuk, ezen különböző melegmennyiségek egyenlő melegség-esés alkalmával egyenlő mozgató erőket hoznak létre, más és más hőmérsékleteknél is, a honnan azt következtethetjük, hogy:

«A melegség esése alacsony mérsékletnél több mozgató erőt hoz létre, mint magasabb mérsékleteknél.». (XIV.)

Vagyis pl. bizonyos adott melegmennyiség több mozgató erőt ad, ha egy 1°-ú testről egy másik, 0°-ú testbe megy át, mintha 101°-ú testből 100°-ú testbe menne át.

A különbség bizonyára igen csekély; s semmi sem lenne, ha a levegő fajlagos melegsége mindig állandó volna, minden sürüségnél. DELAROCHE és BÉRARD kisérletei szerint a fajlagos melegség csak kevéssé változik; olyannyira, hogy az észrevett különbségeket szigorúan véve, talán az észleleti hibáknak vagy egyéb tekintetbe nem vett körülményeknek tudhatnók be.

Azon törvényt, a mely szerint a melegség mozgató ereje különböző hőmérsékleteknél változik, egyedül azon kisérleti adatok segélyével, a melyek felett rendelkezünk, szigoruan nem tudjuk meghatározni. E törvény a gázak fajlagos melegének a mérséklettel való változásának törvényével van összekötve, a melyet a kisérletezés eddig még pontosan nem fejtett meg.*

---

* Ha felvennők, hogy a gázak fajlagos melegsége állandó, a mialatt a hőmérsékletük változik, de térfogatuk nem, az analysis segélyével levezethetnők a mozgató erő és hőmérséklet közt levő egyenletet. Meg is mutatjuk hogyan; ez egyszersmind alkalmat is nyújt megmutatni, hogyan kell a fentebb adott tételek némelyikét algebrai formában kifejezni.

Legyen r azon mozgató erőmennyiség, a mely akkor keletkezik, a midőn adott mennyiségű levegő 1 l.-nyi térfogatról v liternyire terjed ki s közben mérséklete állandó marad. Ha a v térfogat a végtelen kis dv-vel nő, akkor r mennyiség dr-rel növekedik, a mely a mozgató erő természeténél fogva nem más, mint a térfogatnövekedés szorozva a nyomással; ha ezen nyomás p, akkor

$$dr = pdv \qquad 1)$$

Azon állandó hőmérséklet, a melynél a kitágulás történt, legyen t. Ha q a levegő nyomása a midőn térfogata 1 l. ugyanazon mérséklet mellett, MARIOTTE törvénye szerint

$$\frac{v}{1} = \frac{q}{p} \text{ s ebből } p = \frac{q}{v}.$$

Ha pedig P a nyomás, ha ezen levegő ugyancsak 1 l. térfogatú, de mérséklete 0°, GAY-LUSSAC törvénye értelmében:

$$q = P + P\frac{t}{267} = \frac{P}{267}(267 + t),$$

s ebből

$$\frac{q}{v} = p = \frac{P}{267}\,\frac{267 + t}{v}.$$

Jelöljük röviden $\frac{P}{267} = N$, akkor

$$p = N\frac{t + 267}{v},$$

s ebből az 1) alatti egyenlet felhasználásával

$$dr = N\frac{t + 267}{v}dv.$$

Megpróbáljuk most a melegség mozgató erejének kiszámítását; s hogy főtételünket igazolhassuk, azaz, hogy kimutassuk, hogy a felhasznált anyag minősége csakugyan közömbös, többféle anyagot választunk s vizsgálunk meg : a levegőt, vízgőzt s a borszesz gőzét.

Vegyük fel, hogy a használt anyag vízgőz; a műveletek azonosak a 21. lapon leírtakkal; s a következő módon járunk el:

Legyen a levegő a közönséges légköri nyomás alatt s az A test hőmérséklete $\frac{1}{1000}$ a zéró felett, s a B-é 0°. A mint látjuk, a különbség a hőmérsékleteik között igen csekély, a mi kell is, hogy

---

t legyen állandó, s integráljuk a két oldalt:

$$r = N(t + 267) \log v + C.$$

Ha $v = 1$ esetében felteszszük, hogy $r = 0$ s így $C = 0$, akkor

$$r = N(t + 267) \log v. \quad 2)$$

Ez lesz azon mozgató erő, a mely keletkezik, ha a levegő $t°$-nyi állandó mérséklet mellett 1 liternyi térfogatról v l.-nyire terjed ki.

Ha t helyett $t + dt$ hőmérsékletet veszünk, és ép úgy járunk el, a kifejtett mozgató erő lesz

$$r + \delta r = N(t + dt + 267) \log v.$$

Levonva belőle a 2) alatt lévő egyenletet

$$\delta r = N \log v dt. \quad 3)$$

Legyen e a melegmennyiség, a mely a gáz hőmérsékletének állandóntartására kell a kitágulás közben. A 21. lapon lévő okoskodás értelmében δr nem más, mint azon mozgató erő, a mely az e melegmennyiségnek $t + dt$ fokról t fokra való esése közben jön létre. Ha u-nak nevezzük azon mozgató erőt, a mely a melegség egységének $t°$-ról 0°-ra való esésekor létrejön, akkor, mivel a 31. lapon lévő tétel szerint ezen u mennyiség csakis t-től függ, azaz annak függvénye: $u = F(t)$. S ha t-ből $t + tdt$ lesz, akkor

$$u + du = F(t + dt),$$

az előbbi egyenletet levonva

$$du = F(t + dt) - F(t) = F'(t) \, dt.$$

Ez pedig nem más, mint azon mozgató erő, a mely létrejön, ha a melegmennyiség egysége $t + dt$ fokról t-ra esik. Ha a melegmennyiség nem az egység, hanem e, akkor

$$edu = eF'(t) \, dt \quad 4)$$

Azonban edu nem más mint δr,

$$edu = \delta r$$

s a 3. és 4. egyenletek tekintetbe vételével

$$eF'(t) dt = N \log v dt,$$

úgy legyen. A műveletek alatt a levegő térfogata eredeti térfogatának $\frac{1}{116}+\frac{1}{267}$-ed részével nő; ez magában igen kicsiny, de az A és B hőmérsékletkülönbségéhez képest nagy.

A 21. lapon leirt két művelet alatt létrejött mozgató erő igen közel arányos lesz a térfogat növekedésével s a 0·001° és a 0°-nál lévő feszitőerők különbségével; ezen különbség GAY-LUSSAC törvénye szerint $\frac{1}{267000}$-ed része a gáz feszitőerejének, vagyis majdnem $\frac{1}{267000}$-ed része a légköri nyomásnak.

---

s ha $F'(t)\,dt$-vel osztunk

$$e = \frac{N}{F'(t)} \log v = T \log v,$$

ha $\frac{N}{F'(t)}$ törtet T-vel jeleljük; T csak t-nek függvénye.

Az $e = T \log v$ egyenlet nem más, mint a 29. lapon lévő tétel analytikai kifejezése, s érvényes minden gázra nézve, mert hiszen a törvények is, a melyekből levezettük, minden gázra érvényesek voltak.

Ha s azon melegmennyiség, a mely szükséges, hogy a levegőt 1 l. térfogat és 0° mérsékletről v térfogatra és t mérsékletre hozzuk, az s és az e közt lévő különbség nem más, mint azon melegmennyiség, a mely arra kell, hogy a levegőt 1 l. térfogat mellett 0°-ról t°-ra melegitsük. Ezen különbség csakis t-től függ; legyen ez U, ahol U a t-nek valamely függvénye, akkor

$$s = e + U = T \log v + U.$$

Ha ezen egyenletet differenciáljuk t szerint, s ha az U és a T differentiál coefficienseit U' és T'-vel jelöljük, lesz

$$\frac{ds}{dt} = T' \log v + U'. \qquad 5)$$

$\frac{ds}{dt}$ nem más, mint a gáz fajlagos melegsége állandó térfogat mellett, s az 5) alatt lévő egyenlet a 31. lapon lévő tétel analytikai kifejezése.

Ha felteszszük, hogy a fajlagos melegség minden mérsékletnél állandó, (a mely feltevést már a 35. lapon meghánytuk-vetettük) a $\frac{ds}{dt}$ a t-től független lesz; s hogy v-nek két külön értékére nézve az 5) egyenletnek eleget tehessünk, szükséges, hogy T' és U' is független legyen t-től; lesz tehát $T' = C$ állandó mennyiség. Ha T' és C-t dt-vel megszorozzuk, s mindkét oldalt integráljuk, lesz

$$T = Ct + C_1;$$

mivel azonban $T = \frac{N}{F'(t)}$, úgy tovább

A légköri nyomás 10·40 méternyi vízoszlop nyomását képes ellensúlyozni; ezen nyomás $\frac{1}{267000}$-ed része egyenlő $\frac{1}{267000} \times 10{\cdot}40$ m. vízoszlop nyomásával.

A mi a térfogat növekedését illeti, feltételeztük, hogy az eredeti térfogatnak $\frac{1}{116}+\frac{1}{267}$-ed része; ha az eredeti térfogat az, a melyet 1 kg. 0° meleg levegő elfoglal, ez a levegő fajlagos súlyából kiszámítva 0·77 m³.

$$F'(t)=\frac{N}{T}=\frac{N}{Ct+C_1}.$$

Most mind a két oldalt dt-vel szorozzuk, s azután integrálunk:

$$F(t)=\frac{N}{C}\log(Ct+C_1)+C_2$$

s a tetszőleges állandókat változtatva, s megjegyezve, hogy $t=0$ mellett $F(t)$ is nulla:

$$F(t)=A\log\left(1+\frac{t}{B}\right). \qquad 6)$$

Ezzel meghatároztuk az $F(t)$ függvény természetét, s így abban a helyzetben lennénk, hogy a bármely melegség-esésnél létrejövő mozgató erőt meghatározhatnók. Következtetésünk azonban azon alapul, hogy a térfogatukat nem változtató gázak fajlagos melegsége állandó; már pedig ennek helyessége eddig még nincs eléggé kimutatva; addig is 6) alatt lévő egyenletünk csakis nem nagy hőmérsékleti táglatok esetén alkalmazható.

Az 5) alatt lévő egyenlet baloldala a v térfogatú levegő fajlagos melegségét jelenti. Kisérletekből tudjuk, hogy ez daczára a térfogat elég tekintélyes változásainak, csak kevéssé változik; kell tehát, hogy a $\log v$-nek coefficiense, a T' igen kis mennyiség legyen; vegyük, hogy nulla; lesz $T'=0$; szorozzuk mindkét oldalt dt-vel, s azután integráljunk, lesz

$$T=C$$

hol C állandó mennyiség.

Mivel azonban

$$T=\frac{N}{F'(t)}$$

$$F'(t)=\frac{N}{T}=\frac{N}{C}=A$$

s második integrálás után

$$F(t)=At+B.$$

S mivel $F(t)=0$ ha $t=0$ s így $B=0$, lesz

$$F(t)=At;$$

vagyis szavakban: a kifejtett mozgató erő szigorúan arányos a melegség esésével; s ez nem más, mint analytikai kifejezése a 38. lapon lévő tételnek.

Így tehát a következő szorzat:

$$\left(\frac{1}{116}+\frac{1}{267}\right)\times 0{\cdot}77\times\frac{1}{267000}\times 10{\cdot}40$$

a létrejött mozgató erőt fejezi ki s itt az 1 m. magasra felemelt vízmennyiség (m^3 ben számítva) egységeiben van kifejezve.

Ha a kijelölt szorzásokat végrehajtjuk, az eredmény 0·000000372 lesz. Keressük most már, mennyi melegség kell ezen mozgató erő kifejtésére? vagyis mennyi melegség ment át *A* testből *B*-be?

Az *A* test adja:

1. Azon melegséget, a mely szükséges, hogy az 1 kg. sulyú levegő hőmérsékletét 0°-ról 0·001°-ra emeljük;

2. Azon melegséget, a mely arra kell, hogy a levegő hőmérséklete folyton 0·001° legyen, jóllehet közben $\frac{1}{116}+\frac{1}{267}$-ed résznyire kitágul. Ezen két melegmennyiség elseje a másodikhoz képest igen kicsiny lévén, elhanyagolható. A második a 26. lapon leirt okoskodásunk értelmében nem más, mint azon melegmennyiség, a mely 1 kg.-nyi sulyu s egy légköri nyomás alatt lévő levegő mérsékletének 1°-kal való emelésére kell.

Delaroche és Bérard-nak a gázak fajlagos melegsége körül végzett kisérletei szerint a levegőé, egyenlő suly mellett $=0{\cdot}267$-szer a víz fajlagos melegségével. Ha tehát a melegmennyiség egységeül azon melegséget választjuk, a mely 1 kg. víz hőmérsékletének 1°-kal való emelésére kell, akkor azon melegmennyiség, a mely 1 kg. levegőnek 1°-kal való melegitésére szükséges, 0·267 lesz. Igy tehát az *A* test által átadott melegség 0·267 egység.

Ime ez azon melegmennyiség, a mely 0·000 000 372 egységnyi mozgató erőt képes létrehozni, a midőn 0·001°-ról 0°-ra esik.

1000-szer akkora, azaz 1°-nyi esésnél a mozgató erő is körülbelül 1000-szer nagyobb lesz, azaz

0·000 372 egység.

Ha most 0·267 hőegység helyett 1000-t veszünk, a mozgató erő következő arányban nő

$$\frac{0{\cdot}267}{0{\cdot}000\,372}=\frac{1000}{x},\text{ a honnan } x=\frac{372}{267}=1{\cdot}395 \text{ egység.}$$

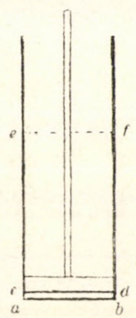
Igy tehát kimondhatjuk, hogy a melegségnek 1000 egysége, ha 1° meleg testről egy másik 0° hőmérsékletübe megy át, s ha levegőt használunk,

1·395 mozgató erő-egységet hoz létre. (XV.)

Hasonlítsuk most össze ezen eredményt avval, a melyet a melegségnek a vízgőzre való hatásából nyerünk.

Vegyünk 1 kg. vizet folyékony állapotban, a mely az *abcd* (lásd 4. ábra) hengeralakú edényben van az *ab* fenék és a *cd* dugó közt.

Vegyük még fel, hogy van ezenkivül két test, *A* és *B*, a melyek állandó hőmérsékleten vannak tartva, s pedig *A*-nak mérséklete csak igen kevéssel magasabb, mint *B*-é. Képzeljük most a következő műveleteket:



4. ábra.

1. A víz érintkezik *A*-val, a dugó elmozdul *cd*-ből *ef*-be; s vízgőz keletkezik oly hőmérsékletnél, mint az *A* testé, s a dugó elmozdulása folytán megnagyobbodott teret kitölti; vegyük fel, hogy ezen *abef* tér akkora, hogy minden víz elpárolog s gőzállapotban tölti ki.

2. Eltávolítjuk az *A* testet, a gőzt *B*-vel hozzuk érintkezésbe; a gőz egy része lecsapódik, nyomása csökken, s a dugó *ef*-ből *ab*-be tér vissza; a megmaradt vízgőz is lecsapódik, a *B*-vel való érintkezés és a dugó nyomása folytán.

3. Most a *B* testet távolítjuk el, s a vizet ujból az *A*-val hozzuk érintkezésbe, úgy, hogy ennek hőmérsékletét veszi fel; ismételjük az első periodust és így tovább.

Az egy teljes cyklusban kifejtett mozgató erőt azon szorzat adja, a melynek egyik tényezője a gőz térfogata, a másik pedig az *A* és a *B* test mérsékleteinél való nyomásoknak különbsége.

A mi a felhasznált melegséget illeti, vagyis a mely az *A* testből *B*-be ment át, az bizonyára nem más, mint az, a mely a víznek gőzzé való változtatására kellett; ha azon kis melegmennyiséget, a mely a folyadéknak *A* test mérsékletéről *B* test mérsékletére való melegitésére szükséges, elhanyagoljuk.

Vegyük, hogy A-nak mérséklete 100° és B-é 99° ; a nyomások különbsége Dalton táblázata szerint 26 mm. higanyoszlop, vagyis 0·36 m. vízoszlop nyomása lesz.

A gőz térfogata 1700-szor akkora, mint a vízé. Ha a gőz sulya 1 kg, a térfogata 1700 liter, vagyis 1·700 m³ lesz.

A kifejtett mozgató erő tehát

$$1{\cdot}700 \times 0{\cdot}36 = 0{\cdot}611$$

lesz, ugyanazon egységekben, mint fentebb.

A felhasznált melegmennyiség az, a mely a már 100° mérsékletű víznek gőzzé való változtatására kell; ezen mennyiséget kisérletileg határozták meg: azt találták, hogy értéke 550 fok, vagy szabatosabban szólva, 550 hőegység.

Látjuk tehát, hogy 550 hőegységből 0·611 mozgató erőegység keletkezik.

Az 1000 hőegységből keletkező mozgató erő mennyiségét a következő aránylat adja

$$\frac{550}{0{\cdot}611} = \frac{1000}{x}, \text{ a honnan } x = \frac{611}{550} = 1{\cdot}112. \qquad \text{(XVI.)}$$

Azaz 1000 hőegység, ha 100° mérsékletű testről 99° mérsékletű másik testre vízgőz közvetítésével vitetik át, 1·112 mozgató erőegységet hoz létre.

A most nyert 1·112 szám körülbelül egy negyed részszel különbözik az előbbi 1·395 értéktől, a mely az 1000 hőegységből származó mozgató erőmennyiséget adja, ha levegő az alkalmazott test; azonban meg kell jegyeznünk, hogy ezen esetben az A és B mérsékletei 1° és 0° voltak, míg most 100° és 99°. A mérsékletkülönbség ugyanaz, de a mérsékletek nem.

Ha pontos összehasonlítást akartunk volna tenni, akkor az 1°-nál fejlesztett és 0°-nál cseppesített vízgőz által kifejtett mozgató erőt kellett volna kiszámítani; s azt is kellett volna tudnunk, mennyi melegmennyiség van az 1°-nál fejlesztett gőzben?

Clément- és Desormes-nek már a 36. lapon említett törvénye megadja erre a feleletet. A vízgőznek képződési melegsége mindig ugyanaz lévén, bármely mérsékletnél fejlődik, ha a 100° mérsékletű víz elgőzölögtetésére 550 hőegység kell, akkor ugyanily sulyú 0° mérsékletű víznek gőzzé való változtatására 550 + 100 azaz 650 hőegység szükséges.

Ha a számítást ezen adat felhasználásával ismételjük, azt találjuk, hogy az 1000 hőegységből, ha az 1°-ú testből 0°-ú testbe vízgőz közvetítésével vétetik át, 1·290 mozgató erőegység fejlődik.

Ezen érték már közelebb van az előbbi 1·395 eredményhez; nem nagyobb a hiba, mint $\frac{1}{13}$, s a valószinű hibahatárokon nem esik kívül, a melyek elég tágak, ha tekintetbe veszszük a sokféle adatot, a melyet számításainkban felhasználtunk. Igy tehát alaptételünket egy különös esetre nézve is bebizonyítottuk.*

Most egy másik esetet fogunk megvizsgálni, azt t. i. a midőn a melegség borszeszgőzre hat.

A tárgyalás teljesen ugyanaz marad, mint a vízgőz esetében; csakis az adatok változnak.

A tiszta alkohol közönséges nyomás mellett 78·7°-nál forr; s belőle 1 kg.-nyi mennyiség 207 hőegységet igényel, hogy ugyanezen mérsékletnél gőzzé változtassuk. (Delaroche és Bérard szerint.)

Az alkohol gőzének feszítő ereje egy fokkal a forráspontja alatt $\frac{1}{25}$-öd részszel kisebb, (legalább a mint ez Bétancour kisérleteiből, lásd Prony «Architecture hydraulique» 180—195. lap következik).**

* Petit-nek egy dolgozatában (Annales de Chimie et de Physique 1818 julius, 294. lap) a melegség mozgató erejének meghatározását találjuk levegő és vízgőz alkalmazása esetén; e szerint a levegőnek nagy előnye volna a vízgőz felett; ez azonban csakis a melegség működésének tökéletlen felfogásából származott.

** Dalton azt vélte észrevenni, hogy a különböző folyadékok gőzeinek feszültségei, a forrásponttól egyenlő távolban ugyanazok; de ez szigorúan nem áll, csak megközelitőleg. Épen ez áll a gőzök rejtett melegségének a sűrűséggel való arányosságáról. (Lásd C. Despretz egy dolgozatának kivonatát. «Annales de Chimie et de Physique» XVI. kötet 105. lap és XXIV. kötet 323. lap.)

Ha ezen adatokat használjuk fel, azt találjuk, hogy a melegség 78·7° és 77·7°-nál alkoholgőzre hatva 0·254 mozgató erőegységet hoz létre.

Ennyit fejt ki 207 hőegység. 1000 hőegységre nézve pedig az eredményt a következő aránylat adja

$$\frac{207}{0{\cdot}254} = \frac{1000}{x} \text{ a honnan } x = 1{\cdot}230.$$

Ezen érték valamivel nagyobb, mint 1·112, a melyet a vízgőznek 100 és 99°-nál való használata esetén nyertünk; azonban ha a vízgőzt 78 és 77°-nál alkalmaztuk volna, akkor Clément és Desormes törvényének felhasználásával 1000 hőegység mozgató erejét 1.212-nek találtuk volna; ez pedig nagyon megközelíti az 1·230 értéket; csak $\frac{1}{50}$-ed részszel tér el tőle.

Még több ilyen számítást is szerettünk volna végezni; kiszámítani pl. azon mozgató erőt, a mely a melegségnek a szilárd vagy folyékony testekre való hatásából, a víz megfagyásából etc. keletkezik; azonban a jelenlegi fizika megtagadja tőlünk az erre nézve szükséges adatokat.* Alaptételünk, a melyet bebizonyítani szándékoztunk, uj igazolásra szorul, ha minden kétségen kivül állónak akarjuk tekinteni; mert a hő elméletének mostani felfogásán alapul, s valljuk be, hogy ezen alap nem látszik megingathatatlannak. Csak uj kisérletek dönthetnék el a kérdést; addig is tekintsük a

E fajta kérdések közeli összefüggésben vannak a tűz mozgató erejével. Legujabban Davy és Faraday szép kisérleteket végeztek a gázoknak nyomás által való cseppfolyósítására, s ezen cseppfolyósított gázak nyomásváltozásait iparkodtak meghatározni kis mérsékletváltozásokra nézve, s új folyadékok alkalmazását vették tervbe a melegség mozgató erejének kifejtésére. (Lásd «Annales de Chimie et de Physique 1824 január, 80 lap.) A fentebb levezetett tétel értelmében azonban előrelátható, hogy újabb folyadéknak alkalmazása melegségmegtakarítás szempontjából semmi haszonnal sem járna. Csakis ha alacsony mérsékleteknél működhetnék a melegség, nyernénk, s a mennyiben e czélra más forrásokból nyerhetnők azt.

* Nem ismerjük azon expansiv erőt, a melyet a szilárd és cseppfolyós testek adott mérsékletnövekedésnél kifejtenek, sem a térfogat-változásnál elnyelt vagy kibocsátott hőmennyiségeket.

fentebb kifejtett eszméket helyeseknek, s alkalmazzuk őket a melegség mozgató erejének kifejlesztése czéljából egész mostanig alkalmazásban lévő módok megvizsgálására (XVII.) (XVIII).

Már többször ajánlották, hogy mozgató erőt a melegségnek szilárd testre való hatása utján hozzunk létre. A leginkább kínálkozó módszer az volna, hogy egy szilárd testet, pl. fémrudat, egyik végén szilárdan megerősitenénk; a másik végéhez a gép egyik mozgó részét kapcsolnók; azután váltakozó melegités és lehütés által a rud hosszúságát változtatva, tetszőleges mozgást hozhatnánk létre. Próbáljuk megitélni, vajjon a mozgató erőnek ily módon való létrehozása előnyös lehet-e? Megmutattuk már, hogy a melegséget akkor alkalmazzuk legelőnyösebben a mozgás létrehozatalára, ha minden a testben történő mérsékletváltozás csak is térfogatváltozásból keletkezett. Minél jobban eleget teszünk ezen feltételnek, annál jobban használjuk ki a melegséget. Már pedig a fentebbi módszer szerint járva el, bizony messze vagyunk ama feltétel betöltésétől; semmi mérsékletváltozás sem következik itt a térfogat változásából; csakis a különböző mérsékletü testek érintkezéséből; és pedig a fémrudnak érintkezéséből egyrészt azon testtel, a melytől melegséget nyer, másrészt azzal, a melynek azt átadja.

Az előirt feltételt csak úgy tarthatnók be, ha a szilárd testtel ép úgy járnánk el, a mint azt a 11. lapon leirtuk; erre nézve azonban szükséges volna, ha csupán a szilárd test térfogatváltozásából tekintélyes mérsékletváltozást nyerhetnénk, legalább ha a melegségnek meglehetős nagy esését akarnánk kihasználni; már pedig ez kivihetetlennek látszik. Valóban a megfontolás arra a gondolatra vezet, hogy a szilárd testek összenyomása vagy kitágitása közben fellépő mérsékletváltozások igen csekélyek.

1. Ugyanis a gépeken, főleg a hőgépeken, gyakran megfigyelhetjük, hogy bizonyos szilárd részek, a melyekre majd az egyik, majd a másik irányban működő igen nagy erők hatnak, jóllehet ezen erők oly nagyok néha, a milyent csak az illető anyag megbir, csak alig érezhetően változtatják hőmérsékletüket.

2. A pénzverésnél, fémek hengerelésénél, sodronyok készitésé-

nél, ezen anyagok a legnagyobb nyomásnak vannak kitéve, a melyet csak a legkeményebb és legerősebb szerszámok segélyével tudunk létre hozni, mégis a mérséklet emelkedése csak csekély; s ha nem volna az, akkor az ezen eljárásoknál használt aczél eszközök csakhamar kilágyulnának.

3. Azt is tudjuk, hogy igen nagy erőt kellene a szilárd és folyékony testekre gyakorolnunk, hogy térfogatuk annyira kisebbedjék, mint a lehülés folytán (pl. 100°-ról 0°-ra). A lehülés azonban több melegség elvitelét követeli, mint az egyszerü térfogatcsökkenés. Ha ez valamely mechanikai behatás folytán jönne létre, a keletkezett melegség nem volna képes a testnek mérsékletét annyi fokkal változtatni, mint a lehülés. Mégis minden esetre igen nagy erő alkalmazását igényelné.

Mivel tehát a szilárd testek térfogatuk változása közben mérsékletüket csak kevéssé változtatják, s mivel a melegség mozgató erejének a legjobb kihasználása csak azon feltétel mellett létesül, hogy minden mérsékletváltozás térfogatváltozásból jöjjön létre, a szilárd testek nem igen látszanak alkalmasoknak eme mozgató erő kifejtésére.

Ugyanez áll a folyékony testekre nézve is; használatuk tehát ugyan azon okokból mellőzendő.*

Nem is említjük itt a gyakorlati kivitel nehézségeit, a melyek számtalanok. A szilárd és folyékony testek összehuzódása és kitágulása igen csekély lévén, hogy ezeket megnagyobbitsuk, bonyodalmas szerkezetekre volna szükségünk; roppant erős eszközöket kellene csinálnunk, hogy az óriási erőket átvihessük; azután a váltakozó műveletek csak nagyon lassan történnének a gőzgép gyors működéséhez képest; olyannyira, hogy roppant méretü és igen költséges gépekkel is csak középszerü hatásokat tudnánk gyakorolni. Csak is a rugalmas fluidumok, gázok vagy gőzök, a meleg-

* Oersted újabb kisérleteiből, a melyeket a víz összenyomhatósága körül végzett, az tünik ki, hogy 5 atm. nyomás esetén a víz mérséklete nem változik mérhető módon. (Lásd «Annales de Chimie et de Physique 1823 február 192. lap.)

ség mozgató erejének kifejtésére szolgáló valóban alkalmas eszközök; az ezen czélra szükséges minden feltétel meg van bennök; könnyen összenyomhatók; majdnem végtelenül terjedékenyek; bennök a térfogatváltozások nagy mérsékletváltozást hoznak létre; végre igen mozgékonyak, gyorsan felmelegíthetők és lehűthetők; könnyű őket egyik helyről a másikra vinni, a mi lehetővé teszi, hogy gyorsan létesíthetjük velök a hatásokat, a melyeket tőlük várunk.

Nagyon sokféle gépet gondolhatunk, a melyek alkalmasak a melegség mozgató erejének kifejtésére rugalmas fluidumok közvetitése utján; bárhogyan járjunk is azonban el, a következő elveket sohasem szabad szemünk elől tévesztenünk:

1. A fluidum hőmérsékletét a lehető legmagasabbra kell emelnünk, hogy nagy melegség esés s így nagy mozgató erő jőjjön létre.

2. Ugyanezen okból a lehűtés is lehető mély fokra eszközlendő.

3. Ügyelnünk kell, hogy a rugalmas fluidum magas hőmérsékletéről alacsonyra az által menjen át, hogy térfogata megnagyobbodott; vagyis, hogy a gáz lehülése mintegy önkényt, a ritkulás folytán történjék.

A határt, a meddig a fluidum felhevitése történhetik, az égés közben létrejövő hőmérséklet adja meg; ez igen magas.

Az alsó határt pedig, a meddig a lehűtést vihetjük, olyan test mérséklete adja, a mely test könnyen s nagy bőségben áll rendelkezésre: ez pedig rendesen a víz.

A mi a harmadik feltételt illeti, azon esetben, a midőn nagy mérséklet-különbségeket, a melegség nagy esését akarjuk felhasználni, az nagy nehézségeket támaszt a kivitelben. Mert ekkor a gáznak a ritkulás következtében igen magas mérsékletről igen alacsonyra kell lehűlnie, a mi pedig nagy térfogat és sűrűség változást igényel, s a mi azt tételezi fel, hogy a gáznak igen nagy a feszítő ereje; vagy pedig azt, hogy ritkulása közben óriási térfogatra terjed ki, a mely két feltétel nehezen teljesíthető; az első ugyanis nagyon erős kazánt igényelne, hogy t. i. a gázt erős nyomás alatt és magas mérsékleten tarthassuk, mig a második szerint roppant nagy edényre volna szükségünk.

Íme ezek a főakadályai annak, hogy a gőzgépekben a melegség mozgató erejét nagy részében hasznosíthassuk. Kénytelenek vagyunk csak kis melegség-esést használni, jóllehet a szén elégéséből igen nagy jöhetne létre.

A gőzgépekben csak ritka esetekben fejlesztünk gőzt 6 atm. nyomáson felül, a mely körülbelül 160° mérsékletnek felel meg; s az is ritka, hogy a sürítés 40°-nál sokkal alacsonyabb mérsékletnél történik; a melegség esése tehát 160°-ról 40°-ra történik s egyenlő 120°-kal, jóllehet az égés 1000° sőt 2000°-nyi esést is hozhatna létre.

Ennek jobb megértésére emlékezzünk vissza, hogy mit értünk a melegség-esése alatt? nem mást, mint a melegségnek *A* magasabb mérsékletü testből *B* alacsonyabb mérsékletü testbe való átmenetelét; s azt mondjuk, hogy a melegség esése 100° vagy 1000°, ha az *A* és *B* testek mérsékleteinek különbsége 100° vagy 1000°.

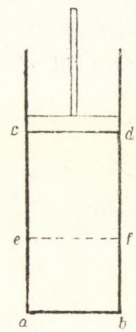
A 6 atm. nyomás mellett dolgozó gőzgép kazánja 160° mérsékletü; ez az *A* test, s a katlannal való folytonos érintkezés állandón 160° mérsékleten tartja s a gőz fejlesztésére szükséges melegséget is onnan nyeri.

A sürítő a *B* test s vízáram segélyével állandóan 40° mérsékleten van tartva; az *A* testből a gőz által hozott melegséget elnyeli. A mérsékletkülönbség ezen két test közt 160—40=120°: ezért mondjuk, hogy itt a melegség esése 120°.

Mivel azonban a szén égéséből 1000°-nál magasabb hőmérsékletet is nyerhetnénk s az éghajlatunk alatt rendesen előforduló víznek mérséklete 10°, igen könnyen létesíthetnők 1000°-nyi esését a melegségnek, mig a gőzgépekben csak 120°-nyit használunk; azonban teljesen még azt sem használjuk ki: mindig van tetemes veszteség, a mely a melegség egyensulyának haszon nélkül való kiegyenlítődéséből jön.

Könnyü most már belátni, mi az oka annak, hogy az u. n. magas nyomásu gőzgépek az alacsony nyomású gépeknél előnyösebbek? ezen előny lényegében abban áll, hogy bennök a melegségnek nagyobb esését használhatjuk fel. A gőzt nagyobb nyomás alatt, azaz magasabb mérsékletnél fejlesztjük; a sürítő mérséklete pedig mindig majdnem ugyanaz; a melegség esése tehát minden esetre nagyobb.

Hogy a magas nyomású gépeket valóban előnyösen használhassuk, szükséges, hogy a melegség esése a lehető legjobban használtassék ki. Nem elég, hogy a gőzt magas mérsékletnél fejleszszük, az is szükséges még, hogy kitágulás által eléggé lehűljön. A jó gőzgép kelléke tehát nemcsak az, hogy a gőzt nagy nyomás alatt működteti, hanem még az is, hogy a gőz egymás után igen változó s pedig fokozatosan csökkenő nyomással hat.*



5. ábra.

Hogy a magas nyomású gépek előnyösségét a posteriori valahogyan kimutassuk, vegyük fel, hogy a közönséges légnyomásnál gőzt fejlesztünk, s azt az *abcd* hengeralakú edénybe (lásd 5. ábra) vezetjük még pedig a *cd* dugó alá, a mely kezdetben az *ab* helyzetet foglalta el. A gőz a dugót *ab*-ből *cd*-be tolja s közben hatásokat fejt ki, a melyekkel itt nem törődünk.

---

* Ezen elv, a gőzgépeknek valódi alapelve, Clément-tól van, aki azt igen világosan fejtette ki pár évvel ezelőtt az Académie des Sciences-hoz benyújtott egyik dolgozatában. Nyomtatásban ugyan nem jelent meg, csak a szerző szivességéből ismerem. Nemcsak kifejezve van benne ezen elv, hanem a mostan alkalmazásban lévő különböző rendszerű gőzgépekre alkalmazva is; minden egyes esetben a mozgató erő a 36. lapon lévő törvény segélyével van meghatározva, s a kisérleti eredményekkel összehasonlítva.

A kérdésben lévő elv oly kevésre van becsülve, hogy ujabban Perkins hires londoni gépész oly gépet szerkesztett, a melyben a gőz eddig szokatlan módon 35 atm. nyomással működik, és semmi kitágulást sem nyer, a mint arról a gép egyszerű megtekintése által is meggyőződhetünk. Ugyanis igen kicsiny gőzhengere van, a mely minden dugattyúlökésnél teljesen megtelik 35 atm. nyomású gőzzel. A gőz semmi hatást sem hoz létre kitágulással, mert nincs is a hol kitágulhasson, s rögtön a hengerből való kilépése után megsűríttetik. A gőz tehát csakis 35 atm. nyomással dolgozik, nem pedig, a mint azt a jó kihasználás kivánná, fokozatosan csökkenő nyomással. Perkins gépe nem is látszik megvalósitani a hozzákötött reményeket. Azt állították ugyanis, hogy az ezen gép által a jó Watt-féle gépekhez képest megtakarított szénmennyiség $^9/_{10}$-ed részt is ki fog tenni, s hogy még más előnyei is vol-

Képzeljük hogy a *cd* helyzetben lévő dugó *ef*-be toljuk, a nélkül, hogy a gőz eltávoznék s melegséget veszítene; most *abef*-be szorult össze és sűrűsége, rugalmas ereje s mérséklete nagyobb lesz. Ha a gőz nem a közönséges légnyomásnál, hanem azon állapotban fejlődnék, a melyben *abef*-be való szorítása után van s mi-

---

nának. (Lásd «Annales de Chimie et de Physique» 1823 aprilis, 429 lap.) Ezen állítások nem igazoltattak be. Ennek daczára Perkins gépe igen értékes találmány, mert megmutatta, hogy a gőzt a jelenleg szokottnál sokkal nagyobb nyomás alatt is lehet használni, s mivel ügyes módositás után valóban hasznos eredményre vezethet.

Watt, a kinek a gőzgép majdnem minden jelentékenyebb megjavitását köszönhetjük, s a ki ezen gépeket a tökéletességnek ma már alig túlhaladható fokára emelte, Watt volt ugyancsak az első, ki a gőzt fokozatosan csökkenő nyomással alkalmazta. Ő több esetben a gőz beáramlását a hengerbe már akkor megszüntette, a mikor a dugattyú útjának még csak felét, harmadát negyedét tette meg, s így mozgását folyton csökkenő nyomás alatt végezte be. Az ezen elven alapuló legelső gépek 1778-ból valók. Az eszmét már 1769-től ismerte, s 1782-ben szabadalmat vett rá.

Pátenséhez a következő táblázat volt hozzá függesztve. Felvette, hogy a gőz a dugó utjának első negyede alatt áramlott a hengerbe; azután ezt húsz részre osztva, a középnyomást kiszámította.

	A henger felső alapjától való út részei.		A gőz csökkenő nyomása ha a teljes nyomás = 1.	
	0·05		1·000	
	0·10	a gőz szabadon	1·000	
	0·15	áramlik a hengerbe	1·000	teljes nyomás.
	0·20		1·000	
Negyed	0·25		1 000	
	0·30		0·830	
	0·35		0·714	
	0·40		0·625	
	0·45		0·555	
Fél	0·50		0·500	a teljes nyomás fele
	0·55	A gőz beáramlása	0·454	
	0·60	megszünik; a dugó	0·417	
	0·65	csak a gőz kiter-	0·385	
	0·70	jeszkedése folytán	0·375	
	0·75	folytatja az útját	0·333	harmada
	0·80		0·312	
	0·85		0·294	
	0·90		0·277	
	0·95		0·262	
Egész út	1·00		0·250	negyede.
		Összeg	11·583	(XIX.)

$$\text{Középnyomás } \frac{11{\cdot}583}{20} = 0{\cdot}579.$$

után a hengerbe vezettetvén a dugót *ab*-től *ef*-be tolta, ezen eltolást csakis az *ef*-től *cd*-ig való kiterjedésével eszközölte volna: a létrejött mozgató erő nagyobb lenne, mint az első esetben. Csakugyan, mert a dugó mozgása egyenlő táglat mellett nagyobb, bár változó, fokozatosan csökkenő nyomás hatása alatt történt volna. A gőz fejlesztésére azért több melegség még sem kellett volna; a különbség csak az, hogy a melegséget magasabb hőmérsékletnél használtuk.

Ilyféle megfontolások után hozták be a kéthengeres gőzgépeket, a melyeket Hornblower talált fel és Woolf javított s a melyek tüzelőanyag-megtakarítás tekintetében a legelőnyösebbek. Állnak pedig egy kis hengerből, a mely minden dugattyúlökésnél többékevésbbé (sokszor egészen) megtelik gőzzel; azután egy nagyobb, rendesen négyszer akkora hengerből, a melybe az első hengerben már felhasznált gőz megy. Igy tehát müködésének végén legalább is négyszeresre növekedett a gőz térfogata. A második hengerből egyenesen a sürítőbe megy; de vezethető volna egy harmadik, ujból négyszer akkora hengerbe, a hol térfogata az eredetinek tizenhatszorosa volna. A legfőbb akadálya ezen harmadik henger

---

Ezek után megjegyezte, hogy a középnyomás a teljes nyomás felénél többet tesz ki, s így negyedrésznyi gőzmennyiséggel a teljes hatásnál több mint felét tudjuk létesiteni.

Ezen számitásainál azt tételezte fel WATT, hogy a gőz MARIOTTE törvényét követi; a mi pedi ez esetben nem áll pontosan, mivel egyrészt kitágulása közben lehül, másrészt pedig semmi sem bizonyítja, hogy a gőz egy része nem csapódik le az expansió alatt. WATT-nak tekintetbe kellett volna még vennie a sűrités után fennmaradt gőz eltávolítására szükséges erőt, a mely gőz annál több, minél messzebb vittük az expansiót. WATT dolgozatához ROBINSON dr. egyszerű képletet csatolt, a mely az expansio hatásának kiszámítására szolgál; azonban ezen képlet is a mondott hibákban szenved. Mégis igen hasznos volt a gépgyárosoknak, mert adatai annyira megközelitők, hogy a kivitelben elég jó eredménynyel használhatók fel. Szükségesnek tartottuk ezen tények felemlítését, mert kevéssé ismeretesek, főkép Francziaországban. A feltalálók mintái után gépeket készitenek itt, de csak keveset törődnek az alapeszmével, a mely azokat vezette; ezen alapeszmék elhanyagolása gyakran nagy hibákra vezet. Jól kigondolt gépeket ügyetlen gyárosok rosszúl készítettek, mert csekély fontosságú javítgatások közben elhanyagolták az alapeszmét, a melyet különben meg sem értettek.

használatának az, hogy igen nagynak kellene lennie s a gőzvezető nyilásoknak nagyon tágaknak.* Nem is foglalkozunk e tárgygyal többet, nem lévén szándékunk itt a gőzgépszerkesztés részleteibe bocsátkozni: ez uj munkának a feladata, a mely csakis vele foglalkoznék s a mely még, legalább Francziaországban nem jelent meg. (Héron de Villefosse «De la Richesse minérale» czimü művében III. k. 50. l. a jelenleg a bányákban használatos gőzgépek igen jó leirását találhatjuk. Angliában pedig az Encyclopædia britannica tárgyalja őket igen kimeritően. A használt adatok néhányát ezen utóbbi műből vettük).

Mig a gőz kitágulásának nagysága főleg az edénytől, a melyben az történik, függ, a gőz sűrűségét, a mely mellett az alkalmazható, csakis a kazán falainak erőssége határozza meg. E tekintetben még nagyon távol vagyunk a tökéletességtől; a rendesen használatban lévő kazánok szerkezete egészen hibás, jóllehet a gőznyomás ritkán haladja meg a 4—6 atmosphaerát, gyakran szétrobbannak és sulyos baleseteket okoznak. Ily balesetek lehetőségét elkerülni s a gőzt mégis magasabb nyomással alkalmazni, kétségkivül lehetséges volna.

A kéthengeres magasnyomású gépeken kivül még egyhenge-

---

* Hogy egy helyett két gőzhengernek alkalmazása előnyösebb, azt könnyű belátni; mert az egyhengeres gépeknél a dugóra ható erő igen változó. Minden, a mozgások átvitelére szolgáló géprésznek igen erősnek kell lennie, hogy ellenállhasson a kezdeti lökésnek s igen jól összeállitva, hogy a szerfelett kártékonyan ható, sőt a gépet hamar tönkretevő rázkódások elkerültessenek. A dugattyúlökés egyenlőtlensége főleg a himbálón, dugattyúrudon, hajtókönyökön s a fogaskerekeken érezteti kártékony hatását. Azonkívül a gőzhenger falának igen erősnek s térfogatának igen nagynak kellene lennie, hogy a gőz benne eléggé kitágulhasson; míg ha két hengert alkalmazunk, akkor az egyik kisebb és erősebb, a másik nagyobb s vékonyabb falú lehet.

A kéthengeres gépek, jóllehet alapelvök helyes, gyakran távol sem bírnak azon előnyökkel, a melyeket működés tekintetében tőlük várhatnánk. Ez főleg onnan van, mert ezen gépek egyes részeinek méretei nehezen alkothatók meg helyesen, s csak ritkán vannak egymással helyes arányban. Még mindig hiányzik jó minta a kéthengeres gépekre, míg a Watt-féle rendszerű gépekre kitűnő minták felett rendelkezünk. Innen van, hogy míg az utóbbiak majdnem egyformán, addig az elsők nagyon különböző módon működnek.

res gépek is vannak, ugyancsak magasnyomással dolgozók; legtöbbjüket két ügyes angol mérnök Trevetick és Vivian készítette. A gőz e gépekben igen magas nyomással, gyakran 8—10 atm. alkalmaztatik, de sürítőjük nincs. A gőz a hengerbe lépve kiterjeszkedik, de nyomása a külső levegő nyomásánál mindig nagyobb marad s felhasználása után a szabadba távozik. Világos, hogy a mozgató erő létrehozatala tekintetében ez épen annyi, mintha a gőzt 100°-nál cseppesítettük volna; így tehát a hasznos hatás egy része veszendőbe megy; azonban e gépeknél nem kell sürítő és légszívó. Olcsóbbak is, mint a többi, egyszerübbek, kevesebb helyet foglalnak el s oly helyeken is használhatók, a hol nincs elég hideg víz a sürítő ellátására. E tekintetben megbecsülhetetlenek, mert más által nem pótolhatók. Ezen gépeket Angliában főleg a bányákban, vagy a földfelszínén épített vasutak szénhordó szekereinek mozgatására használják (XX).

Még csak a mozgató erő létesítésének azon eseteiről mondunk néhány szót, a midőn állandó gázakat, vagy a vizgőztől különböző gőzöket használunk.

Több izben megpróbálták már mozgató erőlétesítés czéljából a melegséget a levegő közvetítésével működtetni. Ezen gáz a vízgőzhöz képest a következő előnyökkel és hátrányokkal bir:

1. Nagy előnye a vízgőz felett az, hogy ugyanazon térfogat mellett hőfoghatósága sokkal kisebb s így egyenlő térfogat-kisebbedés esetén jobban lehül; (e tényt a fentebb mondottak bizonyítják). Már pedig láttuk, mily fontos az, hogy térfogatváltozás utján minél nagyobb mérsékletváltozást hozhassunk létre.

2. A vízgőz fejlesztésére kazánra van szükségünk, mig a levegő közvetlenül melegíthető fel a benne alkalmazott tüz által. Igy nagy veszteséget kerülhetnénk ki, nemcsak melegmennyiségben hanem hőmérsékletben is; ezen előnynyel csakis a levegő bir, a többi gázak nem; sőt ezeket még a vízgőznél is nehezebben lehetne felmelegíteni.

3. Hogy a levegő térfogatát nagyon kiterjeszthesse s hogy ezen nagy kitágulás folytán erős mérsékletváltozás jöjjön létre, már kezdetben nagy nyomás alá kell vetni: össze kellene hát

nyomni légsürítővel vagy bármi más eszközzel még a melegítés előtt; ehez azonban külön készülék kell, a mi a gőzgépeknél nincs meg; ezeknél ugyanis a víz folyékony állapotban vitetik be a kazánba, s ehez kis nyomószivattyú is elégséges.

4. A gőz lehülése a hütő testtel való érintkezésekor sokkal gyorsabb s könnyebben eszközölhető, mint a levegőé. Ezen úgy segithetnénk, ha a már felhasznált levegőt a szabadba bocsátanók; a minek még az az előnye is megvolna, hogy nem volna hütő testre szükség, a mely nem áll mindig rendelkezésünkre; de elkerülhetetlenül szükséges, hogy a levegő nyomása a kitágulás alatt a külső légnyomásnál kisebbre ne csökkenjen.

5. A gőz egyik legnagyobb hátránya az, hogy magas hőmérsékleten alkalmazva igen erős falu edényt igényel. A levegőnél az nincs úgy, mert semmi szükségképeni viszony sincs rugalmassága és hőmérséklete között. A levegő tehát előnyösebbnek látszik a gőznél, ha magas mérsékletü melegség-esésből mozgató erőt akarunk létrehozni; mig alacsonyabb mérsékletnél talán a gőz az előnyösebb. Sőt az is lehető volna, hogy a melegség előbb levegő, azután vizgőz közvetitésével fejtse ki hatását, még pedig úgy, hogy már felhasznált, de még mindig magas hőmérsékletü levegőt nem bocsátanók mindjárt a szabadba, hanem gőzkazán fütésére használnók.

A levegőnek a melegség mozgató erejének kifejtése céljából való alkalmazása a kivitelben igen nagy nehézségekkel jár, de ezek talán nem legyőzhetetlenek; s ha sikerül egykor e nehézségeket legyőzni, igen nagy előnye lesz a vízgőz felett.*

---

* Azon kisérletek közt, a melyeket a tűz mozgató erejének a levegő közvetítésével való kifejlesztése czéljából végeztek, ki kell emelnünk a két NIEPCE-éit, a melyeket ők néhány éve Francziaországban az általuk feltalált s pyreolophornak nevezett eszközükkel tettek. Ezen eszköz körűlbelül a következő volt: dugóval ellátott henger, a melyben közönséges sűrűségű levegő volt; igen gyulékony és igen finoman eloszlott anyagot löveltek be, a mely kis ideig a levegőben elkeveredve lebegett, s azután meggyújtották; a midőn lángra kapott, ép oly hatást gyakorolt, mint pl. a levegő és szénhydrogen keveréke, azaz robbanás, s vele gyors kiterjedés történt, s a dugóra ható erő,

A mi a többi állandó gázokat illeti, e tekintetben feltétlenül használhatatlanok; a levegő minden hátrányos tulajdonságaival birnak s egy előnyével sem.

Ugyanaz mondható más gőzökről is, ha őket a vizgőzzel hasonlitjuk össze.

Ha bőven található volna oly folyékony test, a mely magasabb mérsékletnél forrna, mint a víz, s a melynek gőze ugyanazon térfogat mellett kisebb fajlagos melegséggel birna, s a mely a kazánok készítéséhez használatos fémeket nem támadná meg, ily anyag minden esetre előnyösebb volna, mint a víz; azonban ilyen nem áll rendelkezésünkre a természetben.

Már az alkoholt is ajánlották, sőt gépeket is készítettek, a melyekben alkoholt használtak s arra ügyeltek, hogy süritéskor az alkohol ne keveredjék a süritő vizével, azaz a hütő vizet csak külsőleg alkalmazták s nem vezették a süritő belsejébe; s abban, hogy egyenlő mérséklet mellett az alkohol gőzének erősebb a

---

annak bizonyos elmozdulását hozván létre, felhasználható volt. Azután a levegőt megujitani s a müveletet újrakezdeni már könnyű volt. (XXI.)

Ezen igen elmés és főleg ujdonsága miatt érdekes gép igen nagy hibában szenvedett: a tüzelőanyag lycopodium volt, (a mely szinházainkban lángok előállítására használtatik) oly drága, hogy már ez lerontja a gép minden előnyét; szerencsétlenségre igen nehéz volna olcsóbb anyagot találni, mert poralakú, igen finom, gyorsan lángrakapó anyag kell, a mely semmi, vagy csak nagyon kevés hamut ad.

Szerintünk könnyebb volna, ha nem a két Niepce eljárását követnők; hanem a levegőt sűrítőszivattyúval összenyomnók, azután teljesen zárt katlanon hajtanók keresztűl, a melybe a tüzelőanyagot valami könnyen feltalálható készülék segélyével kis adagonkint vezetnők be; a levegő most dugóval ellátott hengerben, vagy bármi más tágulható edényben hatását kifejtené; azután a szabadba bocsátanók, vagy gőzkazánt melegítenénk vele, hogy még megmaradt melegségét értékesíthessük.

Az ezen eljárásnál felmerülő főbb nehézségek ezek: a katlant elég szilárd fallal venni körül, az égést mindazáltal kellőképen fentartani, a készülék különböző részeit mérsékelt hőfokon tartani, s a henger és dugattyú gyors romlását megakadályozni. Nem hiszszük, hogy ezen nehézségek le nem volnának győzhetők.

Mondják, hogy legujabban Angliában sikeres kisérleteket tettek a melegség mozgató erejének a levegő közvetítésével való kifejtésére. Nem tudjuk, miben állnak eme kisérletek, ha valóban megtörténtek is.

nyomása, jelentékeny előnyt véltek látni. Mi ellenben csak uj legyőzendő nehézséget látunk ebben. A vízgőz főhibája épen az, hogy magas hőmérsékletnél nyomása igen nagy; e hiba tehát alkoholgőz használata mellett még nagyobb. Hogy pedig, mint hitték, segélyével nagyobb mozgató erőt lehet létesíteni, az bizonyításaink szerint nem áll.

A vízgőz s a levegő tehát azon testek, a melyek fölhasználásával tökéletesíthetők a hőgépek, s ezekre kell a jövendő kisérleteknek irányulniok; s arra kell igyekeznünk, hogy ezen testek közvetítésével a melegség lehető legnagyobb esését használjuk ki.

Tárgyalásunkat annak kimutatásával végezzük, hogy mily távol vagyunk még attól, hogy a most alkalmazott eszközeink segélyével a tüzelőanyag összes mozgató erejét kifejthessük.

Kaloriméterben elégetett 1 kg. mennyiségü szén oly melegmennyiségét fejleszt, a mely 7000 kg. vizet 1°-kal képes felmelegíteni, azaz 7000 hőegységet, a fentebb adott értelemben.

A megvalósítható legnagyobb melegség-esést az égés közben kifejlett gázak s a hütő mérsékletének különbsége adja meg. Az égés közben létrejövő hőmérsékletet nem igen vehetjük magasabbnak, mint a mely az oxygen és a tüzelőanyag egyesülésekor keletkezik. Vegyük fel, hogy ez 1000°-ot tesz ki; ezzel nem haladtuk túl a valóságot. A hütő mérsékletéül pedig vegyünk fel 0°-ot.

Már fentebb meghatároztuk közelitőleg, hogy 1000 hőegység menynyi mozgató erőt hoz létre, ha 100°-ról 99°-ra sülyed: azt találtuk, hogy 1·112 egységgel egyenlő. (Az egység, ha 1 m^3 víz 1 m. magasra emeltetik). Ha a mozgató erő a melegség esésével arányos volna, azaz ha minden fokkülönbségre ugyanaz, nagyon könnyü volna kiszámítani azon esetre, ha a mérséklet sülyedése 1000°; ekkor a mozgató erő $1{\cdot}112 \times 1000 = 1112$ egység lenne.

Mivel azonban törvényünk csak közelítés, s magas mérsékleteknél talán nagyon is eltér a valóságtól, csak durva becslést teszünk, még pedig az 1112-nek felét, 560-t veszünk.

Egy kg. szén égésekor 7000 hőegység fejlődik s 1000 hőegységnek 560 mozgató erőegység felel meg, tehát 7-tel szorozni kell.

$$7 \times 560 = 3920.$$

Ez egy kg. szén mozgató ereje.

Hogy ezen elméleti értéket a gyakorlatban kapott eredményekkel összehasonlíthassuk, vizsgáljuk meg mennyi mozgató erőt létesit tényleg 1 kg. szén az ismert legjobb hőgépekben?

A cornwall-i ón- és rézbányákban alkalmazott két hengeres nagy gőzgépek azok, a melyek eddig a legjobb eredményt adták; a legnagyobb hatás, a melyre egyáltalán képesek, a következő; 65 millió font vizet emeltek fel egy angol lábnyi magasságra minden elégetett véka szén után (egy véka szén 88 fontot nyom). Ezen hatásfok egyenlő értékü 195 m^3 viznek egy méternyire való felemelésével minden elégetett kg. szén után; vagyis egy kg. szén égéséből 195 mozgató erőegység keletkezett.*

Ezen 195 egység csak huszadrésze az elméleti maximum gyanánt nyert 3920 egységnek, tehát a tüzelőanyag mozgató képességének csak huszadrésze használtatott ki; pedig példánk az ismert gőzgépek egyik legkitünőbbjére vonatkozik.

A legnagyobb rész ezen messze alul marad. Hogy példát említsünk, Chaillotnak régi gépe 30 kg.-nyi szén elégetése alatt 20 m^3 vizet 33 m. magasra emel, a mi kg.-onkint 22 mozgató erőegységnek felel meg; ez az előbb említett eredménynél 9-szer, s az elméleti maximumnál 180-szor kisebb.

---

* Ezen eredményt egy gép adta, a melynek nagyhengere 45 hüvelyk átmérőjű s 7 láb hosszú volt; CORNWALL egyik Wheal Abraham nevű tárnájában vízszivattyúzásra használták. Ezen eredmény csak kivételesnek tekintendő, mert csak rövid ideig, egy hónapig birta. Már azon hatásfok is, a midőn 30 millió fontnyi víz emeltetik egy angol lábnyi magasságra minden elégetett 88 fontnyi szén után, kitünő eredménynek vétetik. A WATT-féle gépek e hatásfokot néha elérik, de csak ritkán haladják túl. Franczia mértékegységekben ez utóbbi hatás 104,000 kg.-nak 1 méternyire való felemelésével egyenlő minden elégetett kg.-nyi szén után.

Annak értelmében, a mit a gőzgépek hatásfokának mérésénél rendesen lóerőnek nevezünk, egy 10 lóerejű gőzgép 10×75 kg $= 750$ kg.-nyi súlyt képes másodperczenkint 1 m. magasra emelni; azaz óránkint $750 \times 3600 = 2.700,000$ kg.-ot egy méter magasra. Ha most felveszszük, hogy minden kg. szén 104,000 kg. nyi súlyt képes ezen magasságra felemelni, a gépünk által óránkint elfogyasztott szén kiszámítható lesz, még pedig 2.700,000-t el kell osztani 104,000-rel. Lesz $\frac{2700}{104} = 26$ kg. Már pedig nagyon ritka gőzgép fogyaszt 10 lóerőnyi hatásfok mellett 26 kg. szénnél kevesebbet óránkint.

Ne is higyjük, hogy a tüzelőanyag mozgató erejét valaha teljesen ki tudjuk használni. Az erre irányuló próbálgatások még ártalmasabbak volnának, mint hasznosak, ha miattok más fontos tekinteteket hanyagolnánk el. A kevés tüzelőfogyasztás csak egyik kelléke a hőgépeknek; sőt vannak körülmények, a midőn csak másodrendü: a biztonság, szilárdság, tartósság, kis helyfoglalás, olcsóság gyakran előbbvalók.

A kényelmi és takarékossági szempontokat kellően mérlegelni, a fontosakat a mellékesektől megkülönböztetni tudni, hogy a legkönnyebb módon a legjobb eredményre juthassunk, ezen tehetségekkel kell birnia annak, a ki hivatva van embertársainak munkáját vezetni, összefoglalni s valamely hasznos czélra együtt müködtetni.

JEGYZETEK.

Carnot ezen dolgozata német nyelven is megjelent W. Ostwald fordításában; a fordítás végéhez Carnot életrajza s igen érdekes jegyzetek vannak csatolva, a melyek megérdemlik, hogy itt is közöljük.

Sadi Carnot Miklós-Leonard Párisban 1796 jun. 1-én született; 1812-ben a polytechnikai iskolába lépett, a melyet 1814-ben elhagyott, hogy mint alhadnagy tényleges szolgálatba lépjen. 1819-ben rendelkezési állományba tétette magát s 1821-ben Németországba utazott. Visszatérve folytatta magántanulmányait, s 1824-ben bocsátotta nyilvánosságra ezen «Elmélkedés»-ét Réflexions sur la puissance motrice du feu etc. czím alatt, mely az egyetlen müve, a melyet kerekdeden kidolgozva közzétett. 1826-ban ujból tényleges szolgálatba lépett, de 1828-ban tanulmányait folytatandó újból leköszönt. 1832-ben junius hó végén megbetegedett, némi javulás után állapota ujból rosszabbodott, kolerába esett, s 1832 augusztus hó 24-én meghalt.

Sadi Carnot «Elmélkedése» csak kevés példányban jelent meg s kevéssé terjedt el; azért 1872-ben az Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure-ben (II. sér. I. köt. 1872.) ujból lenyomatott. Ugyancsak új kiadása jelent meg 1878-ban Gauthier-Villars által. (A magyar fordítás ezen kiadás után történt.) Életrajzi adatok is vannak hozzácsatolva a szerző testvérétől, H. Carnot-tól; ezekből vette Ostwald a fentebb közölt adatokat. A könyv elején a szerző arczképe is közölve van, valamint kézirataiból sok jegyzet, a melyekből világosan kitünik, hogy S. Carnot, a ki a melegségnek anyagi természetéből indult ki, a legjobb uton volt, hogy a melegség és munka kölcsönös átváltoztathatóságát felfedezze s tudományosan bebizonyítsa. Ezen jegyzetek alapján ugyan még nem tekinthetjük őt, mint többen tették, a thermodynamika első főtétele felfedezőjének; de joggal sejthetjük, hogy ha a halál meg nem akadályozza, az ezen eszme megfogamzásától annak tudományos kidolgozásáig való lépést megtette volna.

Elmélkedésének hatása, a mint már megjegyeztük, kezdetben igen csekély volt. Csak 1834-ben ismerte fel E. Clapeyron, hogy Carnot alapeszméje «gyümölcsöző és kifogástalan», s ugyanolyan czímű dolgozatában (Journal de l'École Polytechnique 14., 170. 1834.) annak grafikai és analitikai értelmezését adja, a mely lényegében még most is használtatik. Kezdetben azonban Clapeyron műve sem igen gyakorolt hatást; mígnem 1843-ban Poggendorff-Annalesei-be a következő megjegyzéssel vétetett fel: «Ezen eddig csak kevés figyelemben részesült tétel fontossága miatt még most is teljes joggal felvehető volt».

Mint Carnot, úgy Clapeyron is azon föltételből indul ki, hogy minden változásnál, a melynél melegség sem nem nyeretik, sem kifelé át nem adatik, a melegség összes mennyisége változatlan marad. Ugyanezen felvételhez ragaszkodott eleinte W. Thomson is, a ki a «Transactions of the Royal Society of Edinburgh» czímű folyóiratban Carnot tárgyalásmódját elfogadta és tovább fejlesztette. Csak Clausius (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie 79., 368. 1850.) adta azt fel 1850-ben s helyette a melegség és munka kölcsönös átváltoztathatóságának elvét, a melyet Mayer Róbert mondott ki, Joule kisérletileg igazolt és Helmholtz a fizika legkülönbözőbb ágaiban alkalmazott, fogadta el s tette tárgyalása alapjául, s csak ez által nyerte Carnot alapgondolata teljes igazi kifejlődését.

Mily ritka volt Carnot «Elmélkedés»-ének eredeti kiadása, arra nézve jellemző, hogy Thomson és Clausius is kijelentik, hogy e munkát eredetiben nem tudták megszerezni, s így Clapeyron-ra szorultak, mint forrásra. Negyedszázad telt belé, a míg a Carnot elvetette mag gyümölcsözni kezdett; általánosabb hatása a tudományban Clausius említett dolgozatától kelteződik.

Carnot eszméjének fontosságát itt behatóbban nem tárgyalhatjuk; elég annyit kiemelnünk, hogy tartalma lényegében megegyezik azzal, a mit a mechanikai melegségelmélet második főtételének nevezünk, s mint ilyen Clausius és W. Thomsom kezei közt a legfontosabb eredményekre vezetett. S épen most az kezd kitünni, hogy az ily tárgyalási mód, mint a melyet Carnot és követői kizárólag a melegség átváltozására állítottak fel s fejtették ki, az energia más alakjaira is érvényes és alkalmazható, úgy, hogy a thermodynamikából energetika jön létre.

I. *Jegyzet.* Carnot a chaleur és calorique szókat minden különbség nélkül egyformán használja. A magyar fordításban mind a kettőt a melegség szóval adtuk vissza, kerülvén a rosz hőanyag, hévany (!) stb. szókat; Carnot sehol sem mondja ugyan ki, hogy a melegséget anyagnak tartja, de jellemző, hogy ott a hol a melegség mozgató erejét a vízesésével hasonlítja össze, mindig a calorique szót használja; míg az általános tárgyalásban inkább a chaleur szót.

II. Carnot itt még mindig a melegség régi anyagi elméletéhez látszik huzni, a mennyiben nyomatékkal tagadja, hogy mechanikai munka létesítésére melegséget kellene elfogyasztani. Később lesz alkalom rámutatni, hogy kora hőelméletének helyessége felett való meggyőződése épen nem volt feltétlen.

III. Az előző lapokon előkészített tétel, hogy t. i. a melegség értékesítésére mérsékletkülönbség okvetetlenül szükséges, itt végleg alakot nyer, s teljes jelentőségében, mint a további tárgyalás alapgondolata van kiemelve. Tényleg ez nem is más, mint ezen elv czéltudatos értékesítése s kidolgozása.

IV. A perpetuum mobile lehetetlen voltával való eme bizonyítási mód a mióta csak itt először alkalmaztatott, a leghathatósabb s legbővebb tudományos segédeszköz maradt. Mindannyiszor, a hányszor csak sikerül egymáshoz tartozó jelenségeket megfordítható körfolyamatba sorozni, ezen mód megadja annak a lehetőségét, hogy a számbavett mennyiségek közt egyenletet állíthassunk fel, azaz őket numerikusan kapcsolhassuk össze.

Nem szabad azonban figyelmünkön kívül hagynunk, hogy a perpetuum mobile lehetetlenségének elve két szempontból tekinthető. Rendesen úgy tekintik, mint annak kifejezését, hogy energia nem teremthető. Már pedig létesíthetnénk perpetuum mobile-t, ha állandó mérséklet mellett való melegségfogyasztás által mechanikai munkát nyerhetnénk, a mely ismét melegséggé válnék, s így az energia megmaradásának törvénye fennállna. Azon tételnek eme második oldala az, a mely Carnot tételénél, a mint azt jelenleg felfogjuk, s a fent említett alkalmazásoknál kérdésbe jön. Igy tehát a thermodynamika mindkét főtételének megfelel a perpetuum mobile lehetetlensége elvének egy-egy oldala, még pedig a második, az inkább elhanyagolt az, a mely az alkalmazásokra nézve fontosabb.

V. Az itt következő fejtegetés a megfordítható körfolyamatok eredeti mintájának leirását adja, a melynek neve Carnot-féle körfolyamat s a Clausius-tól való javításával a második főtétel tárgyalásának alapjául szolgál.

VI. Ezen szavakat már úgy is tüntették fel, mint a melyekben az foglaltatnék, hogy a melegség munkává változtatható át, ellentétben a hő anyagi elméletével. Megengedjük, hogy ezen szavak leirásánál valami hasonló lebegett a szerző szemei előtt; de másrészt ki kell emelnünk, hogy arra nézve, hogy rájuk valami igényt alapíthassunk, nagyon is határozatlanok.

VII. A levegő kitágulási együtthatóját DALTON és GAY-LUSSAC is hibásan határozták meg; $\frac{1}{273}$ egész $\frac{1}{274}$ értékkel bir $\frac{1}{267}$ helyett.

VIII. Az állandó nyomás mellett vett fajlagos melegségek jelenlegi értéke REGNAULT szerint

Levegő	1·000	Nitrogén	0·997
Hydrogén	0·993	Nitrogén oxydul ...	1·450
Szénsav	1·390	Olajképző gáz	1·750
Oxygén	1·013	Szénoxyd	0·998

A szövegben előforduló számításokat ezen értékekkel kellene végezni. A feltétel, a mely szerint a gázok fajlagos melegsége a mérséklettel változik, később tévesnek bizonyult, s így minden erre alapított következtetés elesik.

IX. A fontos tétel eme geniális bizonyítási módja jelenleg már majdnem feledésbe merült. Nagyon megérdemli, hogy a tankönyvekbe felvegyük; mert csupán közvetlen szemlélet utján olyan képletet ad, a mely gyakran használtatik, s a melynek levezetése mindeddig analytikai, tehát nem szemléleti uton történt.

X. Itt kezdődnek a következtetések, a melyek azon hibás feltevésen alapulnak, hogy a munka létesítésénél semmi melegség sem használtatik el; az eredmények tehát szintén hamisak.

XI. Iráshiba, GAY-LUSSAC helyett MARIOTTE volt a szövegben.

XII. REGNAULT kimutatta az ú. n. állandó gázak fajlagos melegségének állandóságát egész 300°-ig.

XIII. Lásd a X. jegyzetet.

XIV. A tétel helyes, jóllehet levezetése nem az. A melegségnek azon része, a mely munkává alakul, ha a mérséklet t_1-ről t_2-re sülyed, egyenlő mérséklet-különbségek esetén fordítva arányos azon absolut hőmérséklettel, a melynél ezen átalakulás történik.

XV. A jelenleg használatos értékek szerint $\frac{423 \cdot 5}{273} = 1 \cdot 55$ lenne.

XVI. A helyes érték $\frac{423 \cdot 5}{273+100} = 1 \cdot 13$ s nagyon közel van CARNOT értékéhez.

XVII. Lásd VI. jegyzet.

XVIII. A következő bizonyítások a VIII. jegyzetben kimutatott hibától mentesek, s érvényük és érdekességük mai napig megmaradt.

XIX. Néhány hibás adat ki van javítva.

XX. A vasutak eredete ez.

XXI. Érdeklődéssel vehetünk tudomást a gázgépek emez őséről.

AZ ERŐ MEGMARADÁSÁRÓL

IRTA

HELMHOLTZ H.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

FORDITOTTA

SZEKERES KÁLMÁN.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1897

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A természeti tünemények megértésénél két szempontot kell tekintetbe vennünk: mely törvények szerint történik a tünemény lefolyása és mi végoka? Ha a természetbuvároknak még eddig nem is sikerült a tünemények végokát megmagyarázni, legalább arra törekedtek, hogy oly törvényeket állítsanak fel, melyek a tünemények egész csoportját átölelik, és viszont, hogy a tüneményeknek egész sora egy bizonyos törvényből levezethető és egységes szempontból tárgyalható legyen. Mennél tágabb a természeti tünemények köre, mely valamely törvényt ural, annál nagyobb az illető törvény becse. S talán nincs egy törvényünk sem a physikában, mely az egész tüneményvilágra oly általános érvényű volna, mint éppen az erő megmaradásának elve, mely a physikának legáltalánosabb tapasztalati törvénye. Messze kiterjedő fontosságát e törvény ama körülménynél fogva nyeri, hogy idő- és helyre nézve igen távol álló és igen különböző természetű tüneményeket foglal egybe.

A physika mai álláspontja szerint a természeti tünemények végső oka, bármily különböző alakban nyilvánuljanak is azok: a különböző erők. És ha az erők végelemzésükben mindannyian mozgató erők: úgy kell, hogy valamennyit ugyanazzal a mértékkel és pedig a mechanikai erő mértékével mérhessük. Ezt foglalja magában az erő megmaradásának törvénye, melynek czélja főleg az, hogy a munka fogalmát és átváltozhatlanságát érthetően megmagyarázza. «A természet egyetemességében meglevő hatásképes erő mennyisége változatlan, tehát sem nem gyarapodhatik, sem nem kevesbedhetik.» Igy fejezi ki Helmholtz az erő megmaradásának elvét, melyet ámbár előtte már többen ismertek; mégis annak terjesztése és kellő érvényre emelése körül talán senki sem szerzett magának oly hatalmas érdemeket, mint éppen ő. 1847-ben adta ki első, e törvényre vonatkozó értekezését (Über die Erhaltung der Kraft. Berlin, 1847.), melynek magyar fordítását itt adjuk; azóta munkálkodásaiban erre tér vissza és mindig arra törekszik, hogy ezt világosabban és teljesebben kifejtse. Dolgozataiban folyton hangoztatja, hogy az elvnek általános elfogadása szükséges, és kimutatja, hogy az összes természeti erők körében érvényes.

Az erő megmaradásának elvét a természeti jelenségek szükebb körére vonatkozólag NEWTON már a XVII. század folyamán felállította. Utána BERNOULLI DÁNIEL az akkor ismert, csakis mechanikai folyamatok nagy részére bebizonyította, és azt az «eleven erő megmaradásának elve» néven általános mechanikai törvény rangjára emelte. A hőtan egyes részeire vonatkozó, valamivel általánosabb érvényességét főbb vonásaiban már RUMFORD és HUMPHRY DAVY is felismerték. De mégis MAYER RÓBERT heilbronni orvos volt az első (MAYER J. R. Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften. 2 kiad. Stuttgart, 1874.), ki a törvény értelmét tisztán és világosan felfogta, általános érvényességét kimondotta és ezt nemcsak az ég és föld physikájának tüneményeire, hanem még az élettan jelenségeire is alkalmazta.

Míg MAYERt élettani kutatások vezették e törvény felismeréséhez, addig JOULE vele csaknem egyidejüleg, de tőle függetlenül a gépszerkesztés technikai kérdései utján jutott az elv fölfedezésére. Ő ama jelenségek körében végezte jelentős és fáradságos kisérleteit, melyen ismereteink leghiányosabbak voltak, és melyen az erő megmaradásának törvénye a legkétesebbnek látszhatott, úgy mint a melegnek munkára és a munkának melegre való átalakulásánál. HELMHOLTZ maga is foglalkozott a különböző természeti erők összeköttetésének a lehetőségével, de MAYER kutatásairól mit sem tudott és JOULE kisérleteit is csak dolgozatainak vége felé ismerte meg. Munkálkodásának eredménye «Az erő megmaradásáról» czímű könyvecske. S ha HELMHOLTZnak nem is adhatjuk meg a feltalálás dicsőségét — mit ő maga sem kiván — azt mégis mindenkinek el kell ismernie, hogy ez elvet ő emelte oly magaslatra, melyről a tudomány egész mezejét áttekinthetni és azokat az utakat föl lehet ismerni, melyeken a tudománynak ezentúl haladnia kell.

Ezek után a tudós világ folyton növekedő érdeklődéssel kisérte az említett elvet, s a legnevezetesebb tudósok úgy elméleti következtetéseik, mint pontos és kitartó kisérletezéseik által hozzájárultak, hogy ez a lehető legszélesebb körben terjedjen el. Azokat a lehozásokat, melyek e felfogási módból következnek és a melyeket az első dolgozatok idejében a kisérletek még be nem igazoltak: azóta legnagyobb részt kisérletileg is bebizonyították. És ha még hiányzik is az egyik-másik összetettebb elméleti következtetésnek kisérleti beigazolása: a bizonyítékok száma már oly nagy, hogy e törvény érvényességét a természet összes tüneményeire egész általánosságban kimondhatjuk.

A fordító.

AZ ERŐ MEGMARADÁSÁRÓL.

Physikai értekezés, a berlini physikai társulatnak 1847 julius hó 23-án tartott gyülésén előadta

Dr. HELMHOLTZ H.

BEVEZETÉS.

A jelen értekezést, ha velejét tekintem, főleg physikusoknak kellett szánnom, és épp azért arra törekedtem, hogy az alapelveket bölcseleti bebizonyítástól függetlenül tisztán physikai föltevés alakjában tüntessem fel; továbbá, hogy következményeit kifejtsem és azokat a physikának különböző ágában a természeti tüneményeknek tapasztalati törvényeivel összehasonlítsam. A felállított tételek leszármaztatása két kiinduló pontból történhetik: vagy abból a tételből, hogy a természeti testek valamelyes csoportosításának egymásra való hatása folytán lehetetlen a határtalanig munkaerőt nyernünk, vagy abból a föltevésből, hogy a természetben előforduló minden hatás visszavezethető vonzó és taszító erőkre, melyek intensitása mindössze is csak az egymásra ható pontok távolságától függ. Hogy mind a két tétel azonos, az értekezés elején kiviláglik. Egyébként e tételeknek — a physikai természettudományok végső és tulajdonképpeni czélját tekintve — még lényegesebb jelentőségük is van, melyet külön e bevezetésben szándékozom kifejteni.

Az említett tudománynak feladata felkutatni azokat a törvényeket, melyek segítségével az egyes jelenségek általános szabályokra vezethetők vissza és ez utóbbiakból ismét meghatározhatók. E szabályok, mint pl. a fénytörés és visszaverődés törvénye, Mariotte és Gay Lussacnak a gáznemüek térfogatára vonatkozó törvénye, nyilván nem mások, mint általános nemi fogalmak, melyek valamennyi hozzátartozó tüneményt átölelnek. E tüneményeknek fölkeresése tudományaink kisérleti részének feladata. Elméleti része pedig a jelenségek ismeretlen okait észrevehető hatásaikból iparkodik eltalálni és az okszerűség törvénye alapján megérteni.[1] E feladatra az az alaptörvény kényszerít és jogosít fel bennünket, hogy a természetben minden változásnak elegendő okának *kell* lennie. A legközelebbi okok, melyeket mi a természettüneményeknek tulajdonítunk, lehetnek változatlanok és változók; ez utóbbi esetben ugyanaz az alaptétel kényszerít bennünket, hogy e változásnak más okai után ujra kutassunk, és így tovább, míg végre is a végső okokhoz jutunk, melyek egy változatlan törvény szerint hatnak, s melyek következésképen bármely időben ugyanolyan körülmények mellett ugyanazt a hatást hozzák létre. Az elméleti természettudományok végczélja tehát a természetben előforduló jelenségeknek végső változatlan okát föltalálni. Valjon valamennyi jelenség tényleg ily okokra vezethető-e vissza, valjon tehát a természetnek teljesen felfoghatónak kell-e lennie, avagy valjon előfordulnak-e a természetben változások, melyek magukat egy szükségképpi okszerűség törvénye alól kivonják, melyek tehát valamely önkényesség, korlátlanság körébe esnek — annak eldöntésére itt nincs hely. De az minden esetre világos, hogy ama tudománynak, mely a természet megértését tűzi ki czélul, abból a föltevésből kell kiindulnia, hogy felfogható; és e föltevéshez mérten kell következtetnie és vizsgálódnia, míg talán czáfolhatlan tények korlátainak megismerésére nem kényszerítik.

A tudomány a külvilág tárgyait kétféle abstractio alapján vizsgálja. Az egyik pusztán csak létezésüket veszi tekintetbe, más tárgyakra vagy érzéki szervünkre való hatásukat számba nem véve; mint ilyeneket *anyag* névvel jelöli meg őket a tudomány. E szerint az anyag létezése, mint ilyen, reánk nézve valami nyugodt, hatástalan; megkülönböztetjük rajta a térbeli eloszlást és a mennyiséget (tömeget), melyet örökké változhatlannak tételezünk fel. Milyenségi különbségeket az anyagnak mint ilyennek, nem tulajdoníthatunk, mert ha különféle anyagokról beszélünk, úgy az anyagok különfélesége mindég csak hatásaiknak különféleségében nyilvánul, tudniillik erőiben. Az anyag, mint ilyen, épp ezért is semmi más változásnak alá nem eshetik, csak a térbelinek, azaz a mozgásnak. De a természet tárgyai éppen nem hatástalanok; sőt inkább ama hatásuk folytán ismerjük meg őket, melyeket érzékszerveinkre gyakorolnak, a menynyiben mi e hatásokból egy hatóra következtetünk. Ha tehát az anyag fogalmát a valóságban fel akarjuk használni, azt csak úgy tehetjük, ha egy második abstrakczio által hozzáadjuk azt, a mit tőle előbb elvontunk: tudniillik a képességet, hogy hatást gyakorolhasson, vagyis az anyagot most erőkkel ruházzuk fel. Világos, hogy az erő és anyag fogalmai a természetre való alkalmazás esetében soha el nem választhatók egymástól. A puszta anyag a körülötte levő természetre nézve közömbös lenne, mert a természetben vagy érzéki szerveinkben soha semmiféle változást nem tudna létre hozni. A puszta erő olyas valami lenne, a minek léteznie kellene és még sem léteznék, mert mi azt, a mi létezik, anyagnak mondjuk. Éppen úgy elhibázott dolog, ha az anyagot valami valóságosnak, az erőt csupán csak fogalomnak értelmezzük, a melynek semmi valóságos nem felelne meg; ellenkezőleg mind a kettő a valóságnak teljesen egyenlő módon alakult abstractiója. Hiszen az anyagot éppen csak erői folytán, nem pedig önönmagán veszszük észre.

Megelőzőleg láttuk, hogy a természeti tünemények változatlan végső okokra vezetendők vissza; ez a követelés most így alakul: bizonyos idő multán oda kell jutnunk, hogy végső okok gyanánt változatlan erők szolgáljanak. Az anyagokat, melyek erői változatlanok, (minőségük minden körülmény között ugyanaz,) tudományosan (chemiai) elemeknek neveztük. De gondoljuk csak a világmindenséget változatlan minőségű elemekre felbontva, úgy az ily rendszerben az egyedüli, még lehetséges változások térbeliek lesznek, azaz mozgások, és a külső viszonyok, melyek az erők hatásait módosítják, szintén csak térbeliek lehetnek, tehát az erők csak is mozgató erők, melyek hatásukban egyedül a térbeli viszonyoktól függnek.

E szerint a pontosabb meghatározás a következő: A természettüneményeket vissza kell vezetnünk változhatatlan mozgató erővel felruházott anyagok mozgására, melyek csupán a térbeli viszonyoktól függnek.

A mozgás a térbeli viszonyok változása. Térbeli viszonyok csak határolt térmennyiségekkel szemben lehetségesek, de tagolatlan üres térrel szemben nem. Épp azért a valóságban csak úgy fordulhat elő mozgás, mint legalább is két anyagi test térbeli viszonyainak változása egymással szemben. A mozgató erő, mint a mozgás oka, szintén legalább is két testnek egymáshoz való viszonyában nyilvánul; e szerint úgy kell meghatároznunk, mint két tömeg törekvését, hogy kölcsönös helyzetüket megváltoztassák. De az erőt, melylyel két teljes egészében vett tömeg egymásra hat, föl kell bontanunk minden részének erejére, melyek szintén hatnak egymásra; azért vezet vissza a mechanika mindent az anyagi pont erőire, azaz az anyaggal telt tér pontjainak erőire.[2] De a pontoknak távolságukon kivül egymással szemben semmi más térbeli viszonyuk nincs, mert távolságuk irányát csak is legalább még két más pontra való vonatkoztatás által határozhatjuk meg. Épp azért valamely mozgató erő, melyet a pontok egymás ellenében kifejtenek, csakis távolságuk változására lehet ok, azaz vonzó és taszitó erő. Ez azonnal következik az elégséges okok tételéből. Az erőknek, melyeket két tömeg egymásra gyakorol, szükségképpen nagyságuk és irányuk szerint meghatározottaknak kell lenniök, mihelyt a tömegek helyzete pontosan adva van. Két pont azonban teljesen csak egyetlen egy irányt határoz meg, tudniillik összekötő egyenesüket; következőleg az erőnek, melyet azok egymás ellenében kifejtenek, e vonal szerint kell irányulniok, és intensitásuk csupán csak a távolságtól függhet.

Ime, a physikai természettudományoknak feladata végre is határozottan odairányul, hogy a természettüneményeket változatlan vonzó és taszitó erőkre vezesse vissza, melyek intensitása a távolságtól függ. E feladat megoldhatósága egyuttal föltétel a természet teljes megértéséhez. A számoló mechanika eddig még nem fogadta el ezt a megszorítást a mozgató erő fogalmát illetőleg: egyrészt azért, mert alaptételeinek eredetével nem volt tisztában; másrészt, mert az a feladata, hogy az öszetett mozgató erőknek eredményét is kitudja számítani oly esetekben, a melyekben az összetett erőknek egyszerűkre való felbontása még nem sikerült. Mégis a tömegek összetett rendszereinek mozgásánál az idevonatkozó általános elvek nagy része csak az esetben érvényes, a midőn e rendszerek változatlan vonzó és taszító erőkkel hatnak egymásra, tudniillik a virtualis sebességek, a súlypont mozgása megtartásának, a szabad rendszerek forgató síkjának és forgató momentumának, az eleven erő megmaradásának elvénél. Ez elvek közül földi viszonyoknál főleg az első és utolsó nyer alkalmazást, mert a többi csak tökéletesen szabad rendszerre vonatkozik; az első megint, mint azt ki fogjuk mutatni, az utolsónak különös esete, mely épp azért úgy fog látszani, mint az általunk felállított következtetésnek legáltalánosabb és legfontosabb eredménye.

E szerint az elméleti természettudománynak, hacsak nem akar a megérthetésnek fele utján megállani, nézeteit összhangzásba kell hoznia az egyszerű erőknek természetére vonatkozó követelményekkel és ezeknek következményeivel. Feladatát akkor fejezte be, a midőn sikerült a tüneményeket egyszerü erőkre visszavezetnie és egyuttal kimutatnia, hogy az adott visszavezetés az egyetlen lehető, melyet a tünemények megengednek. Akkor be volna bizonyítva, hogy ez a természet felfogásának szükséges fogalmi alakja, melynek azután objectiv igazságot is kellene tulajdonítanunk.

I. Az eleven erő megmaradásának elve.

Kiindulunk abból a föltevésből, hogy a természeti testek valamelyes csoportosítása folytán mozgató erőt állandóan semmiből teremteni lehetetlen. Ebből a tételből már Carnot és Clapeyron * a részint ismeretes, részint a kisérletileg még be nem bizonyított törvényeknek egész sorát vezették le elméletileg, melyek a legkülönbözőbb természeti testek faji és lappangó melegére vonatkoztak. A mi értekezésünk czélja az említett elvet teljesen ugyan-

* Poggendorff's Annalen LIX. 446. 566.

ilyen módon a physikának minden ágában életbe léptetni: egyrészt azért, hogy annak alkalmazhatóságát mind amaz esetekben, melyekben a tünemények törvényeit már elégséges módon kikutatták, bebizonyítsuk; másrészt azért, hogy — támogatva az ismeretes esetek sokféle analógiája által — ez elv segítségével tovább következtessünk a még eddig tökéletesen meg nem vizsgált törvényekre és ez által a kisérletnek alkalmas vezérfonalat adjunk.

Az említett elvet következőkép tüntethetjük fel: Gondoljunk természeti testekből álló oly rendszert, melyben a testek egymással bizonyos térbeli viszonyban állanak és kölcsönös erejüknek hatása folytán mozgásba jönnek és mindaddig mozognak, míg bizonyos meghatározott helyzetet el nem foglalnak: az ez esetben nyert sebességüket úgy foghatjuk fel, mint bizonyos mechanikai munkát és azt ilyenné át is alakíthatjuk. Ha már most azt akarjuk, hogy ezek az erők másodízben is hassanak és ez által még egyszer ugyanazt a munkát szolgáltassák, úgy a testeket bizonyos úton módon, más rendelkezésünkre álló erők alkalmazásával a kezdeti föltételekhez kell visszavinnünk. Ehhez tehát az utóbbi erőkből egy bizonyos munkamennyiséget újból föl kell használnunk. Az említett esetben elvünk azt követeli, hogy a munkamennyiség — a melyet nyerünk, ha a rendszert képező testek a kezdethelyzetből a másodikba, és a melyet elvesztünk, ha a másodikból az elsőbe mennek át — mindig ugyanaz maradjon, bármilyen legyen is ennek az átmenetnek módja, útja vagy sebessége. Mert ha e munkamennyiség valamelyik úton nagyobb lenne, mint egy másikon: akkor az első útat arra használhatnánk fel, hogy erőt nyerjünk; a másodikat, hogy erőt változtassunk viszsza, melyre azután az éppen most nyert munkának egy részét fordíthatjuk. Ime, így határozatlan nagyságú mechanikai erőt kapnánk s egy *perpetuum mobile*-t készítettünk volna, mely nemcsak maga magát tartaná mozgásban, hanem még kifelé is képes lenne erőt szolgáltatni.

Keressük fel ez elvnek mathematikai kifejezését, úgy azt az eleven erő megmaradásának ismeretes törvényében fogjuk feltalálni. A munkamennyiséget, melyet nyerünk és felhasználunk, ismeretes módon fejezhetjük ki, mint egy meghatározott h magasságra föl-emelt m súlyt: e szerint az mgh lesz, a hol g a nehézségi erő intensitása. Hogy az m test szabadon függőleges irányban h magasságra emelkedjék föl, arra $v=\sqrt{2gh}$ sebesség szükséges; és ugyanez lesz sebessége, a mikor a földre visszaérkezik. E szerint $\frac{1}{2}mv^2=mgh$; így az mv^2 szorzat felét, melyet a mechanikában az «m test eleven ercjének mennyisége» név alatt ismerünk, a munkamennyiség mértékének helyébe is tehetjük. Hogy az erők intensitásának mérésénél a most szokásos móddal jobban megegyezzünk, ajánlom, hogy az $\frac{1}{2}mv^2$ kifejezéssel legott az eleven erő mennyiségét jelöljük meg, a miáltal az a munkamennyiség mértékével identikus lesz. Az eleven erő fogalmának eddigi alkalmazására vonatkozólag, a mi csak a megbeszélt elvre szorítkozott volt, e változtatás minden jelentöség nélkül való; de a következőkben jelentékeny előnyöket fog nyujtani. Az eleven erő megtartásának elve, a mint ismeretes, a következő: Ha tetszőleges számú mozgatható tömegpontok csak oly erők befolyása alatt mozognak, melyet azok maguk egymással szemben fejtenek ki, vagy a melyek szilárd középpontok ellen irányozottak: akkor — bármilyen is legyen a közbeeső időben pályájuk és sebességük — az eleven erők öszszege, valamennyinek együttvéve, minden időpillanatban ugyanaz, a mennyiben valamennyi pont egymással szemben és az esetleg jelenlevő szilárd középpontokkal szemben ugyanazt a relativ helyzetet foglalja el. Gondoljuk az eleven erőket úgy alkalmazva, hogy azok a rendszer részeit, vagy velük egyenlő értékű tömegeket bizonyos magasságra emeljenek: úgy abból következik, a mit éppen kimutattunk volt, hogy az említett föltételek mellett az ilyképen előállított munkamennyiségeknek is egyenlőknek kell lenniök. Ez elv azonban nem érvényes az erők valamennyi lehetséges fajtájánál; a mechanikában rendesen a virtualis sebességek elvéhez füzzük s csak a vonzó és taszító erőkkel felruházott anyagi pontokra bizonyíthatjuk be. Itt most ki fogjuk mutatni, hogy az eleven erő megtartásának elve csuppán csak ott érvényes, a hol a működő erők anyagi pontok erőire bonthatók fel, mely utóbbiak az összekötő egyenes irányában hatnak és intensitásuk csak a távolságtól függ. Az ily erőket a mechakában rendesen középponti erőknek szokás nevezni. Ebből egyúttal visszamenőleg az következik, hogy a természeti testeknek másra való bármely hatásuknál — a hol a fönnemlített elv egész általánosságban e testek legkisebb részeire is alkalmazható — legegyszerűbb alaperők gyanánt ily középponti erőket kell fölvennünk.

Vegyünk most tekintetbe egy m tömegű anyagi pontot, mely több — egy A szilárd rendszerré összetömörült test erőinek hatása alatt mozog: úgy a mechanika módot nyujt arra, hogy ennek az anyagi pontnak helyzetét és sebességét bármely időpillanatra meghatározhassuk. Független változónak az időt, t-t fogjuk fölvenni, és ettől fognak függni m-nek x, y, z koordinátái vonatkoztatva az A rendszerrel szemben meghatározott koordinatarendszerre, érintői sebessége q, a tengelyekkel egyközű komponensek $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ és végre a ható erők komponensei:

$$X = m\frac{du}{dt}, \quad Y = m\frac{dv}{dt}, \quad Z = m\frac{dw}{dt}.$$

Elvünk azt követeli, hogy $\frac{1}{2}mq^2$, tehát q^2 is mindég ugyanaz legyen, ha m-nek helyzete A-val szemben nem változik; más szóval q^2-tet ne csak a t független változó függvényeként, hanem még az x, y, z koordináták függvénye gyanánt is előállíthassuk, azaz, hogy a következő egyenlet fennálljon:

$$d(q^2) = \frac{d(q^2)}{dx}dx + \frac{d(q^2)}{dy}dy + \frac{d(q^2)}{dz}dz. \qquad 1)$$

De mivel $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, úgy $d(q^2) = 2udu + 2vdv + 2wdw$. Ha most a fennjelzett értékekből u helyébe $\frac{dx}{dt}$, du helyébe $\frac{Xdt}{m}$ és épp úgy v és w helyébe a megfelelő értékeket teszszük, a következő egyenletet kapjuk:

$$d(q^2) = \frac{2X}{m}dx + \frac{2Y}{m}dy + \frac{2Z}{m}dz. \qquad 2)$$

Az 1) és 2) számú egyenletek bármely tetszőleges dx, dy, dz-re együttesen fennállanak, így kell, hogy külön-külön is fennálljanak és hogy legyen:

$$\frac{d(q^2)}{dx}=\frac{2X}{m},\quad \frac{d(q^2)}{dy}=\frac{2Y}{m},\quad \frac{d(q^2)}{dz}=\frac{2Z}{m}.$$ [3]

Itt azonban q^2 tisztán csak x, y, z függvénye; ebből következik, hogy az X, Y és Z, azaz a működő erőnek iránya és nagysága is csak m helyzetének függvénye, melyet az A-val szemben foglal el.

Vegyünk fel most A rendszer helyett csupán csak egy anyagi pontot a-t, úgy az előbb bebizonyitottakból következik, hogy annak az erőnek irányát és nagyságát, melylyel a az m-re hat, csak az m-nek az a-val szemben elfoglalt relativ helyzete határozza meg. De most m helyzetét az a pontra való vonatkozása folytán még csak ma távolság határozza meg; úgy ez esetben a törvényt oda kell módositanunk, hogy az erő iránya és nagysága ennek az r távolságnak függvényei legyenek. Vonatkoztassuk a koordinátákat valamely tetszőleges tengelyrendszerre, melynek kezdőpontja a-ban fekszik, úgy kell, hogy

$$md(q^2)=2Xdx+2Ydy+2Zdz=0 \qquad 3)$$

legyen valahányszor

$$d(r^2)=2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

azaz valahányszor

$$dz=-\frac{xdx+ydy}{z}.$$

Ez értéket a 3) számú egyenletben felhasználva lesz:

$$\left(X-\frac{x}{z}Z\right)dx+\left(Y-\frac{y}{z}Z\right)dy=0$$

bármely tetszőleges dx és dy mellett, tehát akkor egyenkint is

$$X=\frac{x}{z}Z \quad \text{és} \quad Y=\frac{y}{z}Z,$$

azaz a resultansnak a koordináták kezdőpontja felé, az a ható pont felé, kell irányulnia.

Következőleg azokban a rendszerekben, melyek egész általánosságban az eleven erő megtartása törvényének hódolnak, az anyagi pontok egyszerű erőinek középponti erőknek kell lenniök.

II. Az erő megmaradásának elve.

Fejezzük ki most a megtárgyalt törvényeket még általánosabban arra az esetekre, midőn középponti erők működnek.

Ha φ az r irányban ható erőnek intensitása, positivnak véve ha vonz, negativnak ha taszít, tehát

$$X = -\frac{x}{r}\varphi; \quad Y = -\frac{y}{r}\varphi; \quad Z = -\frac{z}{r}\varphi; \qquad 1)$$

úgy a megelőző fejezet 2) egyenlete szerint

$$md(q^2) = -2\frac{\varphi}{r}(xdx + ydy + zdz),$$

azaz

$$\tfrac{1}{2}md(q^2) = -\varphi dr.$$

Vagy ha Q és R, q és r a megfelelő érintősebességeket és távolságokat jelölik,

$$\tfrac{1}{2}mQ^2 - \tfrac{1}{2}mq^2 = -\int_r^R \varphi dr. \qquad 2)$$

Vizsgáljuk meg közelebbről ez egyenletet, úgy azt látjuk, hogy baloldala azoknak az eleven erőknek a különbsége, melylyel m két különböző távolságnál bír. Hogy az $\int_r^R \varphi dr$ mennyiség jelentőségét fölismerjük, állítsuk elő φ intensitását, a mely az m és a összekötő egyenesének különböző pontjaihoz tartozik, derékszögű ordináták által: akkor a szóban forgó mennyiség azt a területet jelöli meg, melyet a görbe vonal az R és r-hez tartozó ordináták között az abscissa tengelylyel zár be. A hogyan most e területet a valamennyi határtalan kicsiny és benne fekvő ordináták összege gyanánt tudjuk előállítani; úgy az a mennyiség valamennyi erőintensitás foglalata, melyek az R és r között fekvő távolságokban hatnak. Ha most azokat az erőket, a melyek az m pontot mozgatni iparkodnak, a meddig még a mozgást éppen hogy nem létesitették, *feszitő erőknek* nevezzük, azzal szemben, a mit a mechanika *eleven erőnek* mond: akkor az $\int_r^R \varphi dr$ mennyiséget az R és r távolságok között fekvő *feszítő erők összegével* jelölhetjük meg, és az előbbi törvényt így fejezhetjük ki: Valamely tömegpont eleven erejének növekedése egy középponti erő befolyása által létesített mozgás alkalmával éppen akkora, mint azoknak a feszítő erőknek összege, melyek az illető távolságok megfelelő változásához tartoznak.

Legyen két pont meghatározott távolsága R, álljanak e pontok valamely vonzó erő hatása alatt, úgy azokat az erő hatása a kisebb r távolságok felé kényszeríti, és e mellett sebességük, eleven erejük növekedni fog. Érkezzenek azonban e pontok a nagyobb r távolságok felé, úgy eleven erejüknek csökkenie és végre teljesen felhasználódnia kell. Ezekből kifolyólag a feszítőerők $\int_r^R \varphi dr$ összegét $r=0$-tól, $r=R$-ig a vonzó erőknél úgy tekinthetjük, mint a még meglévőket, az $r=R$ és $r=\infty$ között terjedő összeget pedig mint a felhasználtakat; az elsők életbe léphetnek közvetlenül, az utóbbiak csak eleven erőben szenvedett egyenlő értékű veszteség után. Megfordítottan áll ez a taszító erőknél. Ha a pontok R távolságban vannak, úgy azok távolságuknál fogva eleven erőt nyernek, és meglevő feszítő erők gyanánt azokat jelöljük meg, melyek $r=R$ és $r=\infty$ között vannak; a felhasználtak gyanánt pedig azokat, melyek $r=0$ és $r=R$ között vannak.

Hogy most törvényünket egész általánosságban életbe léptessük, vegyünk fel tetszőleges számú anyagi pontokat m_1, m_2, m_3 stb.; általánosan, $m_\mathfrak{a}$-val jelölve tömegét, melynek koordinátái $x_\mathfrak{a}$, $y_\mathfrak{a}$, $z_\mathfrak{a}$; a rájuk ható erőknek a tengelyekkel egyközü komponensei $X_\mathfrak{a}$, $Y_\mathfrak{a}$, $Z_\mathfrak{a}$, a tengelyeknek megfelelőleg szétbontott sebességek $u_\mathfrak{a}$, $v_\mathfrak{a}$, $w_\mathfrak{a}$, az érintő sebességek $q_\mathfrak{a}$, továbbá legyen $m_\mathfrak{a}$ és $m_\mathfrak{b}$ között a távolság $r_{\mathfrak{ab}}$, a középponti erő kettőjük közt $\varphi_{\mathfrak{ab}}$. Most minden egyes m_n pontra nézve az 1) egyenlettel analog módon felírhatjuk

$$X_n = \Sigma\left[(x_\mathfrak{a}-x_n)\frac{\varphi_{\mathfrak{a}n}}{r_{\mathfrak{a}n}}\right] = m_n\frac{du_n}{dt}$$

$$Y_n = \Sigma\left[(y_\mathfrak{a}-y_n)\frac{\varphi_{\mathfrak{a}n}}{r_{\mathfrak{a}n}}\right] = m_n\frac{dv_n}{dt}$$

$$Z_n = \Sigma\left[(z_\mathfrak{a}-z_n)\frac{\varphi_{\mathfrak{a}n}}{r_{\mathfrak{a}n}}\right] = m_n\frac{dw_n}{dt},$$

a hol az összegező jel mindazokra a tagokra vonatkozik, melyek úgy származnak, ha az $\mathfrak{a}$ mutató helyébe n kivételével sorjában valamennyi 1, 2, 3 stb. mutatót teszszük.

Szorozzuk meg az első egyenletet $dx_n = u_n dt$, a másodikat $dy_n = v_n dt$, a harmadikat $dz_n = w_n dt$-vel, és gondoljuk, hogy az így keletkezett egyenleteket minden egyes $m_\mathfrak{b}$ pontra épp így felállítottuk, mint előbb az m_n-re, azután valamennyit adjuk össze, akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\Sigma\left[(x_\mathfrak{a}-x_\mathfrak{b})\,dx_\mathfrak{b}\frac{\varphi_{\mathfrak{ab}}}{r_{\mathfrak{ab}}}\right] = \Sigma[\tfrac{1}{2}m_\mathfrak{a}d\,(u_\mathfrak{a}^2)],$$

$$\Sigma\left[(y_\mathfrak{a}-y_\mathfrak{b})\,dy_\mathfrak{b}\frac{\varphi_{\mathfrak{ab}}}{r_{\mathfrak{ab}}}\right] = \Sigma[\tfrac{1}{2}m_\mathfrak{a}d\,(v_\mathfrak{a}^2)],$$

$$\Sigma\left[(z_\mathfrak{a}-z_\mathfrak{b})\,dz_\mathfrak{b}\frac{\varphi_{\mathfrak{ab}}}{r_{\mathfrak{ab}}}\right) = \Sigma[\tfrac{1}{2}m_\mathfrak{a}d\,(w_\mathfrak{a}^2)].$$

A sor tagjait balról úgy kapjuk meg, ha először is $\mathfrak{a}$ helyébe valamennyi egyes mutatót, 1, 2, 3 stb. teszszük és minden egyesnél $\mathfrak{b}$ számára is valamennyi nagyobb és valamennyi kisebb értéket azoknál, mint a melyek $\mathfrak{a}$-nál már megvannak. Az összegek tehát két részre oszlanak szét, melyek egyikénél $\mathfrak{a}$ mindig nagyobb, mint $\mathfrak{b}$, a másiknál pedig mindég kisebb, és világos, hogy az egyik rész

$$(x_p-x_q)\,dx_q\frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

minden tagjára nézve a másikban elő kell fordulnia

$$(x_q-x_p)\,dx_p\frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

kifejezésnek, melyeket ha összeadunk

$$-(x_p-x_q)(dx_p-dx_q)\frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

kapjuk. Képezzük ez összevonásokat az összegekben, adjuk mind a hármat össze és használjuk fel a következő egyenletet

$$d[(x_{\mathfrak{a}}-x_{\mathfrak{b}})^2+(y_{\mathfrak{a}}-y_{\mathfrak{b}})^2+(z_{\mathfrak{a}}-z_{\mathfrak{b}})^2]=r_{\mathfrak{ab}}dr_{\mathfrak{ab}},$$

akkor lesz

$$-\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}}dr_{\mathfrak{ab}}]=\Sigma[\tfrac{1}{2}m_{\mathfrak{a}}d(q_{\mathfrak{a}}^2)], \tag{3}$$

vagy

$$-\Sigma[\int_{r_{\mathfrak{ab}}}^{R_{\mathfrak{ab}}}\varphi_{\mathfrak{ab}}dr_{\mathfrak{ab}}]=\Sigma[\tfrac{1}{2}m_{\mathfrak{a}}Q_{\mathfrak{a}}^2]-\Sigma[\tfrac{1}{2}m_{\mathfrak{a}}q_{\mathfrak{a}}^2], \tag{4}$$

ha R és Q, valamint r és q összetartozó értékeket jelentenek.

Ime itt balról újból a felhasznált feszítő erők összege van, jobbról pedig az egész rendszer eleven erejének összege, és most a törvényt következőleg fejezhetjük ki: A szabad anyagi pontok mozgásának minden esete alkalmával, ha azok oly vonzó és taszító erőik befolyása alatt állanak, melyek intensitása csak a távolságtól függ, — a veszteség a feszítő erő mennyisége tekintetében mindég egyenlő az eleven erőben való nyereséggel, és az első nyeresége az utóbbi veszteségével. *E szerint a meglevő eleven erők és feszítő erők összege mindig állandó.* Ebben a legáltalánosabb alakban törvényünket az *erő megmaradása elvének* mondhatjuk ki.

Nem változik a törvénynek megadott levezetésében semmi sem, ha a pontoknak egy részét, melynek adatait $\mathfrak{b}$ betűvel jelöljük, szilárdnak gondoljuk, úgy hogy $q_{\mathfrak{b}}$ állandó $=0$; ez esetben a törvény alakja:

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}}dr_{\mathfrak{ab}}]+\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}}dr_{\mathfrak{ab}}]=-\Sigma[\tfrac{1}{2}m_{\mathfrak{b}}d(q_{\mathfrak{b}}^2)]. \tag{5}$$

Még csak az van hátra, hogy kimutassuk, minő viszonyban van az erő megmaradásának elve, a statikának legáltalánosabb törvényéhez, az úgynevezett virtualis sebességek elvéhez. E viszonyt ugyanis a 3) és 5) egyenletek közvetlenül mutatják. Mert ha $m_{\mathfrak{a}}$ pontoknak egy bizonyos elhelyezkedése mellett egyensúly van, vagyis abban az esetben, — midőn ezek a pontok nyugalomban vannak, tehát $q_{\mathfrak{a}}=0$, — a nyugalomnak ez állapota fenn is állana, tehát valamennyi $dq_{\mathfrak{a}}=0$, úgy a 3) egyenletből következik, hogy

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}} dr_{\mathfrak{ab}}] = 0, \qquad 6)$$

vagy ha az $m_{\mathfrak{b}}$ pontok erői is a rendszeren kívül befelé hatnak, az 5) egyenletből

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}} dr_{\mathfrak{ab}}] + \Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}} dr_{\mathfrak{ab}}] = 0. \qquad 7)$$

Ez egyenletekben dr alatt a távolságok változásait kell értenünk, melyek az m_a pontoknak tetszőleges, a rendszer más egyéb föltételei által megengedett, kicsiny eltolódásai folytán lépnek be. A megelőző lehozásokból láttuk, hogy az eleven erőnek szaporodása, tehát a nyugalomból a mozgásba való átmenet is, csupán csak a feszítő erő felhasználásából keletkezik; az utolsó egyenletek ennek megfelelőleg azt fejezik ki, hogy oly föltételek alatt, a midőn az első pillanatban egyetlenegy lehetséges mozgás-irány sem használ fel feszítő erőt: a rendszer, ha már egyszer nyugalomban van, kell, hogy nyugalomban is maradjon.

Hogy a felsorolt egyenletekből a statikának minden törvénye levezethető, az ismeretes. A működő erő természetére vonatkozó legnevezetesebb következmény ez: Gondoljuk, hogy az m pontok tetszőleges kicsiny eltolódásai helyébe olyanokat tettünk, melyek akkor állhatnának meg, ha a rendszer magában szilárdan lenne összekötve, úgy hogy a 7. egyenletben valamennyi $dr_{\mathfrak{ab}}=0$; akkor következik, hogy külön

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}} dr_{\mathfrak{ab}}] = 0 \quad \text{és}$$
$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{ab}} dr_{\mathfrak{ab}}] = 0.$$

Most tehát úgy a külső, mint a belső erőknek az egyensúlyi föltételeket ki kell elégíteniök. Ha pedig a természeti testeknek valamely rendszerét a külső erők bizonyos egyensúlyi helyzetbe hozzák, úgy az egyensúly nem szünik meg, 1. ha a rendszer egyes pontjait jelenlegi helyzetükben egymás között szilárdan összekötötteknek gondoljuk, és 2. ha azután azokat az erőket elvesszük, melyeket ezek egymással szemben gyakorolnak. De ebből most már tovább következik: Ha az erőket, melyeket két tömegpont egymásra gyakorol, két rájuk irányozott külső erő hozza egyensúlyba, akkor azoknak az esetben is egyensúlyt kell tartaniok, a mikor a pontok egymásra gyakorolt erőinek helyébe azoknak szilárd összeköttetését teszszük. De oly erők, melyek valamely szilárd egyenes két pontjára támadólag hatnak, csak akkor vannak egyensúlyban, ha maguk is az illető egyenesben feküsznek, egyenlők és ellenkező irányúak. Tehát maguk a pontok erői is, melyek a külsőkkel egyenlők és ellenkező irányúak, kell, hogy az összekötő egyenes irányában feküdjenek: így csak vonzó vagy taszító erők lehetnek.

Az itt felállított tételeket következőképp foglalhatjuk össze :

1. Valahányszor természeti testek oly vonzó vagy taszító erők befolyása folytán, melyek az idő és sebességtől függetlenek, egymásra hatnak, kell, hogy eleven erejük és feszitő erejük összege állandó legyen; tehát a nyerhető munkamennyiség maximum kell, hogy meghatározott, véges legyen.

2. Oly erők is előfordulnak a természeti testekben, melyek az időtől és sebességtől függnek, vagy a melyek más irányban működnek, mint a milyen két-két ható anyagi pontnak összekötő egyenese, ilyenek pl. a forgató erők; úgy lehetséges lesz oly testeket összeállitani, a melyekben vagy a végtelenbe vész el erő, vagy nyerhető.[4]

3. Középponti erők hatása alatt álló testrendszerek egyensúlyánál a belső és külső erőknek kell maguk közt egyensúlyt tartaniok, mihelyest a rendszer testeit olyanoknak gondoljuk, melyek egymás közt mozdulatlanul vannak összekötve, és csak az egész rendszer mozgatható a kivüle fekvő erőkkel szemben. Ily testeknek szilárd rendszerét épp ezért sohasem hozhatjuk mozgásba belső erőinek hatása folytán, hanem csak külső erők befolyása mellett. Vegyünk fel most nem középponti, hanem más fajtájú erőket, úgy a természeti testekből oly szilárd összeköttetések létesülhetnek, melyek maguk mozognak a nélkül, hogy szükséges volna más testekkel valamiféle vonatkozásban lenniök.

III. Az elv alkalmazása a mechanikai tantételeknél.

Most áttérünk törvényünknek egyes alkalmazásaira. Először azokat az eseteket fogjuk röviden megemlíteni, melyeknél az eleven erő megtartásának elve már eddig is használatban és ismeretes volt.

1. *Mindazok a mozgások, melyek az általános gravitatio-erő befolyása alatt történnek,* tehát az égi és a nehéz földi testek mozgásai. Amazoknál abban nyilatkozik meg a törvény, hogy sebességük növekszik, mihelyt pályájukon a középponti testhez közelednek, hogy nagy pályatengelyük, keringési és forgási ideje nem változik; emezeknél pedig abban az ismeretes törvényben, hogy az esés végsebessége csak az esési magasságtól függ, nem pedig a megfutott pálya irányától és alakjától, és hogy e sebesség, ha azt surlódás vagy rugalmatlan ütközés meg nem semmisíti, éppen elégséges arra, hogy a leeső testeket ismét ugyanarra a magasságra vigye fel, mint a melyből azok leestek. Azt már említettük, hogy valamely meghatározott súly esési magasságát gépeink munkamennyiségének mértéke gyanánt használjuk fel.

2. *A mozgás átvitele össze nem nyomható szilárd testek és folyadékok* által,* mihelyest rugalmatlan anyagok surlódásának és ütközésének nincs helye. Általános elvünk ez esetekben rendszerint a következő szabályt fejezi ki: valamely mechanikai hatás folytán továbbított és átváltoztatott mozgásnak erő-intensitása mindig oly mértékben fogy, a mily mértékben növekszik sebessége. Vegyük fel tehát, hogy oly gép — melynél valamelyes folyamat egyenletesen hoz létre munkaerőt — m súlyt c sebességgel emel: ez esetben egy más mechanikai berendezés nm súlyt szintén emelni fogja, de csak $\frac{c}{n}$ sebességgel; mert kell, hogy gép által az időegységben létesített feszítőerő mennyisége mindkét esetben mgc legyen, a hol g nehézségi erő intensitása.

3. *A teljesen rugalmas szilárd testek és folyadékok mozgása.*

---

* Helmholtz folyadék névvel a cseppfolyós és légnemű testeket jelöli. *F.*

A teljes rugalmasság föltételeül rendesen azt szokták felállítani, hogy az alakjában és térfogatában megváltozott test ugyanazt az alakot és térfogatot tökéletesen nyerje vissza ; e föltételhez még a következőt kell fűznünk : a részecskék a test belsejében ne surlódjanak. E mozgás törvényei azok, melyek után elvünket legelőször ismerték meg és leggyakrabban alkalmazták. Az alkalmazásban a legközönségesebb esetek gyanánt megemlítendők: szilárd testeknél a rugalmas ütközés, melynek törvényei elvünkből és a súlypont megmaradásának elvéből könnyen levezethetők, és a sokféle rugalmas rezgés, melyek minden új impulsus nélkül is mindaddig eltartanak, míg a belsejükben való surlódás és mozgásuknak külső közegekbe való átültetése miatt meg nem semmisülnek.

A folyadékokból, épp úgy a cseppfolyósoknál (nyilván ezek is rugalmasak, csakhogy rugalmassági modulusuk igen nagy és részecskéiknek van egyensúlyi helyzetük), mint a gáznemüeknél (kicsiny rugalmassági modulussal és egyensúlyi helyzet nélkül) kiterjedésük alkalmával valamennyi mozgás általában véve hullámalakúvá változik át. Ide tartoznak a cseppfolyós testek felületein keletkező hullámok, a hang mozgása és valószinüleg a fénynek és a sugárzó hőnek mozgása is.

Valamely hullámsor által átjárt közegben egy bizonyos Δm részecskének eleven ereje világos, hogy meghatározható ama sebesség által, melylyel az az egyensúlyi helyzetben bír. Ha a^2 az intensitás, λ a hullámhossz, α a terjedési sebesség, x az abscissa és t az idő; akkor az általános hullámegyenlet az u sebességet — mint tudjuk — a következőkép határozza meg:

$$u = a \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - at)\right].$$

Egyensúlyi helyzet esetében $u = a$, tehát a részecske $\frac{1}{2}\Delta m a^2$ eleven ereje a hullámmozgás alatt az intensitással arányos. Ha valamely középpontból gömbalakú hullámok terjednek szét, úgy azok mindig nagyobb tömegeket hoznak mozgásba, kell tehát, hogy intensitásuk csökkenjen, ha eleven erejüknek változnia nem szabad. De mivel a hullám által átfogott tömegek úgy növekednek, mint a távolságok négyzetei, ebből következik az ismeretes törvény, hogy az intensitások ezek fordított viszonyában fogynak.

A fény-visszaverődés, törés és polarizálás törvényeit két különböző hullámsebességű medium határán — mint ismeretes — már Fresnel levezette abból a föltevésből, hogy a határrészecskék mozgása mindkét esetben ugyanaz és az eleven erő megmarad. Két hullámsor interferencziája esetében nem jő létre eleven erő megsemmisülés, hanem csak másféle elosztás. Két a^2 és b^2 intensitású hullámsornak, melynek nem interferálnak, intensitása minden megadott pontban a^2+b^2; ha pedig interferálnak, úgy maximum alkalmával $(a+b)^2$, tehát $2ab$-vel nagyobb; minimum alkalmával $(a-b)^2$, tehát $2ab$-vel kisebb, mint a^2+b^2.

A rugalmas hullámok eleven ereje csak ama jelenségeknél semmisül meg, melyeket hullám-elnyelés nevével jelölünk. A hanghullámok elnyelését leginkább a visszahatás az engedékeny, rugalmatlan testekkel, pl. függönyökkel, terítőkkel szemben mozdítja elő; azt tarthatjuk tehát, hogy az elnyelés: a mozgásnak az illető testre való átterjedése vagy abban való megsemmisülése a surlódás miatt. Valjon a mozgás a légrészecskéknek egymással szemben kifejtett súrlódása folytán is megsemmisül-e, azt még nem dönthetjük el. A hősugarak elnyelését arányos hőkifejlődés kiséri; hogy ez utóbbi mennyiben felel meg egy bizonyos erőegyenértékűségnek, azt a következő fejezetben fogjuk tárgyalni. Az erő megmaradásának akkor lesz helye, a mikor a besugárzott testben éppen annyi meleg lép újból fel, mint a mennyi a kisugárzóban eltünik; föltéve, hogy elvezetés semmi sincs és hogy a sugárzás legcsekélyebb része sem mehet át más helyre. Már eddig előre felállították a tantételt a hősugárzásra vonatkozó kísérletekhez, de előttem még egy kisérlet sem ismeretes, mely azt okokkal támogatná. A fénysugaraknak áttetsző vagy teljesen átlátszatlan testek által való elnyelésénél háromféle jelenséget ismerünk. Először: a phosphoreskáló testek a fényt oly módon nyelik el, hogy azt azután újból mint fényt bocsátják ki. Másodszor: úgy látszik, hogy legtöbb, talán valamennyi fénysugár meleget fejleszt. Az újabb időben mindinkább eltünnek azok a látszólagos akadályok, * melyek ama föltevésnek állottak útjában, hogy a szinképnek melegítő, világító és chemiai sugarai azonosok ; és úgy látszik, hogy e chemiai és világító sugaraknak hőegyenértékűsége igen csekély amaz intensiv hatáshoz képest, melyet a szemre gyakorolnak. Ha ezeknek a különbözőképp ható sugaraknak egyneműségét megállapítani nem tudnók, úgy bizonyára kénytelenek lennénk kinyilvánítani, hogy a fénymozgások végoka ismeretlen. Harmadszor: az elnyelt fény sok esetben chemiai hatásokat hoz létre. Az erőviszonyok szempontjából itt e hatásoknak kétféle módját kell megkülönböztetnünk: első sorban azt, a melynél csak az impulsus van meg a chemiai rokonság munkásságához, a katalytikusan müködő testekhez hasonlóan, pl. a hatás valamely chlor és hydrogén keverékre; másodsorban azt, a melynél a chemiai rokonságok egymásellen működnek, pl. az ezüstsók szétbontásánál, a zöld növényrészekre való hatásnál. E jelenségek legtöbbjénél a fényhatások eredménye még oly kevéssé ismeretes, hogy alig mondhatunk itéletet a mellette főllépő erők nagyságáról; úgy látszik, hogy mennyiségük és intensitásuk tekintetében e hatásoknak csak is a zöld növényrészekre gyakorolt befolyása jelentékeny.

IV. A hő erőegyenértéke.

Azok a mechanikai jelenségek, melyeknél eddigelé absolut erőveszteséget állapitottak meg, a következők:

1. *Rugalmatlan testek ütközése.* E jelenség legtöbbnyire az ütköző testeknek alakváltozásával és tömörítésével van összekötve, tehát a feszítő erők növelésével; azután jelentékeny hőemelkedést találunk gyakran ismétlődő ütéseknél, pl. egy fémdarab kalapácsolásánál; végre a mozgás egy része mint hang adódik át a hozzáütköző szilárd és légnemű testeknek.

2. *A surlódás,* két egymás felett ide-oda mozgó test felüle-

* L. MELLONI. POGGD. Ann.-ben. LVII. k. 300. l. — BRÜCKE. u. o. LXV k. 593. l.

tén ép úgy, mint annak belsejében, melyet alakváltozás esetében a kisebb részecskéknek egymáson való eltolódása hoz létre. A surlódásnál is találunk a test molekulás szerkezetében legtöbbnyire ugyan csekély változásokra, kivált midőn egymáshoz surlódásuk kezdetét veszi; a felületek később annyira alkalmazkodnak egymáshoz, hogy e változást tartósabb mozgás esetén elenyésző kicsinynek vehetjük fel. Némely esetekben e változások teljesen hiányoznak, pl. ha folyadékok szilárd testekhez vagy egymás közt surlódnak. Ezeken kivül előfordulnak hő és elektromos változások is.

A surlódást a mechanikában oly erőnek szokták feltüntetni, mely a meglevő mozgás ellenében működik, és melynek intensitása a sebességnek függvénye. Nyilvánvaló, hogy e felfogás az összetett jelenségnek, melynél a legkülönbözőbb molekulás erők kölcsönös hatásba lépnek, csak nagyon is tökéletlen kifejezése, de elfogadjuk a számítás könnyitésére. E felfogásból következett, hogy a surlódásnál teljesen elvész az eleven erő, ép így elfogadták ez elvet a rugalmas ütközésnél is. E mellett azonban nem vették tekintetbe, hogy ha a surlódó és ütköző testeknek összenyomása folytán létrejövő növekedést a feszitő erőben számításon kívül hagyjuk is, az így nyert meleg szintúgy erőt képvisel, mely által mechanikai hatásokat hozhatunk létre. Ép így nem vész el az eleven erő az e mechanikai eljárás által nyert elektromosságnál, mert az vagy közvetlenül vonzó és taszító erőben, vagy közvetve abban nyilvánul, hogy hőt fejleszt. Most tehát az a kérdés van hátra, vajjon ezeknek az erőknek az összege megegyezik-e minden esetben az elveszett mechanikai erőkkel? Oly esetekben, a melyekben a molekulás változásokat és az elektromosság kifejlődését elkerülhetjük, ezt a kérdést a következőleg állíthatnók fel: vajjon a mechanikai erő egy bizonyos veszteségénél minden egyes esetben ugyanaz a meghatározott melegmennyiség keletkezik-e és mennyiben lehet valamely hőmennyiség meghatározott mechanikai erővel egyenértékű? Az első kérdés megoldására eddigelé kevés kisérletet tettek. JOULE*

* I. P. JOULE. On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power. Phil. mag. XXVII. 205.

azt a hőmennyiséget vizsgálta meg, mely szűk csőben és edényben a víz surlódása folytán keletkezik, melyet turbinaszerűleg készített kerék hozott mozgásba. JOULE első kisérleténél azt találta, hogy az a meleg, mely 1 kilogr. vizet 1° C.-kal fölmelegít, 452 kilogrammot 1 méternyire emel föl; második kisérleténél 521 kilogrammot kapott. Egyébiránt az ő mérési módja alig felel meg a vizsgálódás nehézségének, úgy hogy az eredmények a pontosságra igényt nem igen tarthatnak; e számok valószinűleg igen magasak, mert ámbár kisérleténél észlelése elől meleg könnyen veszhetett el, ezzel szemben a mechanikai erőnek szükségszerű veszteségét a többi géprésznél le nem számította.

Térjünk most át arra a további kérdésre, mennyiben lehet meleg valamely erővel egyenértékű? A meleg anyagelmélete szerint a hőanyag mennyiségének szükségszerűleg állandónak kell lennie, és mechanikai erőt csak az által hozhat létre, hogy kiterjeszkedni iparkodik. Itt is tehát a meleg erőegyenértékűsége abban a munkában nyilvánul, melyet a hő akkor végez, a mikor magasabb hőmérsékletről alacsonyabbra megy át; ez értelemben oldották meg CARNOT és CLAPEYRON e feladatot, és következtetéseiket ama föltételhez kötötték, hogy ily erőegyenérték legalább is a gázokra és gőzökre fennáll.

A surlódási meleg keletkezésének megmagyarázására az anyagelméletnek föl kell vennie, hogy vagy kivülről vezettetik be, mint HENRY W.* állítja, vagy BERTHOLLET** szerint a surlódási meleg a felületek és a lesurolt részek összenyomása folytán származik. Az első föltevés által követelt jelenséget még sehol sem tapasztaltuk, hogy t. i. a surlódó részek környezetében a gyakran hatalmas hőtömegnek megfelelő hideg fejlődnék ki. A második föltevést, — nem is tekintve, hogy a tömörítésnek teljesen valószinűtlen nagy hatását kénytelen elfogadnia, a mi a hydrostatikai mérleggel legtöbbnyire észre sem vehető, — tökéletesen megdöntik a cseppfolyós testek surlódása és azok a kisérletek, melyeknél vasdarabo-

* Mem. of the Society of Manchester. T. V. p. 2. London. 1802.

** Statique chimique. T. I. p. 247.

kat kalapácsolás által izzóvá és puhává tehetünk, jégdarabokat dörzsölés által megolvaszthatunk,* holott a lágygyá vált vas és az olvadás folytán előállott víz összenyomott állapotban nem maradhatnak. De ezenkívül az elektromos mozgás által létesített meleg is bizonyítja, hogy a meleg mennyisége tényleg absolute növekedhetik. Ha a dörzsölési és a VOLTA-féle elektromosságot mellőzük is, mert azt tehetnők fel, hogy ez esetekben az elektromosságnak a hőanyaggal való valamiféle összeköttetése és vonatkozása folytán ez utóbbit keletkezési helyéről csupán csak elvezettük és a megmelegített vezető sodronyokba elhelyeztük volna: mégis két utunk marad fenn, melyeken elektromos feszültségeket tisztán mechanikai eljárással létesíthetünk, s melyeknél mind a mellett semmiféle tovavezethető meleg nincs jelen: ezek a mágnesek eloszlása és a mágnesek mozgása. Ha positiv elektromosságú tökéletesen elszigetelt testünk van, mely elektromosságát el nem veszítheti, és ehez elszigetelt vezetővel közeledünk, úgy ez utóbbi szabad $+E$-t fog mutatni. Töltsük meg ezzel valamely batteriának belső fegyverzetét, akkor az eltávolított vezetőben szabad $-E$ marad meg, melylyel az említett batteriának külső fegyverzetét vagy egy másik batteriát tölthetünk meg. Ez eljárást megismételvén nyilván valamely tetszőleges nagyságú batteriát megtölthetünk, a hányszor csak akarjuk, és megtöltése által meleget hozhatunk létre a nélkül, hogy az valahol eltünnék. Ime itt egy bizonyos mechanikai erőmennyiséget használtunk fel, mert valahányszor a negativ megtöltött vezetőt, a positiv megosztó testtől eltávolítjuk, mindannyiszor a kettő között létező vonzást kellett legyőznünk. A valóságban ily módon akkor járunk el, a midőn elektrophor felhasználásával leydeni palaczkot töltünk meg. Ugyanez az eset áll fenn a mágneses-elektromos gépeknél. A mig csak mágnes és fegyverzet egymás ellenében mozognak, mindaddig keletkeznek elektromos áramok, melyek a záró sodronyokban meleget fejlesztenek, és a mennyiben ez áramok a fegyverzetnek mágnessel szemben való mozgása ellen működnek, ennek megfelelőleg bizonyos mennyiségű mechanikai erőt

* HUMPHRY DAVY, Essay on heat, light and the combinations of light.

emésztenek föl. Nyilvánvaló, hogy a gépet alkotó testekből végtelenig fejleszthetünk meleget a nélkül, hogy az valahová eltünnék. Joule* kisérleteivel igyekezett bebizonyitani, hogy a mágneses-elektromos áram a spiralisnak a közvetlen mágnesi befolyás alatt álló részében is meleget, és nem hideget létesit. E körülményből most már következik, hogy a meleg mennyisége mechanikai erők által tényleg szaporitható, hogy a hőtüneményeket ép ezért nem magyarázhatjuk meg valamely anyagnak csupán csak jelenlétéből, hanem igenis levezethetjük változásokból, mozgásokból, legyenek azok valamely sajátságos anyagéi, vagy akár a más ismert sulyos és sulytalan testekéi, pl. az elektromosságéi vagy a fényétheréi. Az, a mit eddig a meleg mennyiségének mondottak, ezután kétféle dolgot fejezne ki: először a hőmozgás eleven erejének mennyiségét, másodszor az atomokban rejlő ama feszitő erők mennyiségét, melyek elhelyezésüknek megváltozása mellett ilyféle mozgást létrehozni képesek voltak. Az első megfelelne annak, a mit eddig szabad, a második, a mit kötött melegnek neveztünk. Ha szabad megkisérlenünk e mozgás fogalmát még felfoghatóbbá tenni, erre úgy látszik a tudomány jelenlegi állapotában legjobban megfelelő általában véve az a hypothesis, mely Ampère nézetéhez csatlakozik. Gondoljuk, hogy a testeket atomok képezik, melyek maguk különböző részekből állanak (chemiai elemekből, elektromosságiakból stb.); úgy minden ilyen atomban háromfajtájú mozgást különböztethetünk meg, még pedig 1) a sulypont eltolását, 2) a sulypont körül való forgást, 3) az atom részeinek egymással szemben való eltolását. Az első két mozgást a szomszéd atomok erői egyenlitenék ki, és ép azért rajtuk hullámalakban tovaterjednek; ez oly tovaterjedés, mely hősugárzásnak, de nem hővezetésnek felel meg. Az atomok egyes részeinek egymás ellenében való mozgását az atomokon belül található erők egyenlitenék ki, és a szomszéd atomok csak lassan lennének együttmozgásba hozhatók, mint pl. az egyik rezgő húr megszólaltatja a másikat, ennek fejében azután az illető atom vele egyenlő mozgást veszitene el; a tovaterjedésnek

* Philos. Magazine. 1844.

ez a módja úgy látom, hogy a vezetett melegéhez hasonló. Általában véve az is természetes, hogy az atomoknak ilyetén mozgása a molekulás erőben változásokat, tehát kiterjedést és halmazállapot-változást hozhat létre. Nem határozzuk meg, hogy milyen fajtájúak e mozgások, mert még hiányzanak mindazok az adatok, a melyekre támaszkodhatnánk; különben is czélunkra elégséges, ha már csak az is lehetővé vált, hogy a hőtüneményeket mint mozgást foghatjuk fel. Az erő megmaradásának e mozgásnál annyiban lenne helye, a mennyiben eddig is a hőanyag mennyiségének megmaradásánál helye volt: úgymint az egyik testből a másikba történő vezetés és sugárzás valamennyi tüneményénél, a halmazállapot változása folytán előálló hő-megkötésnél és felszabadításnál.

A meleg keletkezésének különböző módjai közül már tárgyaltuk, hogyan jő létre meleg sugárzás és mechanikai erők által, később fogjuk megvizsgálni, hogyan jő elektromosság utján. Hátra van még a chemiai folyamat által létesített melegkifejlődés. Ezt eddigelé úgy magyarázták, hogy az a hőanyag szabadult fel, a mely a vele egyesült testben lappangva volt jelen. E szerint minden egyszerű testhez és minden chemiai egyesüléshez, melyek még magasabb rangú egyesülésre is képesek, egy bizonyos mennyiségű lappangó meleget kellett hozzáfűznünk, mely szükségszerűleg chemiai szerkezetükhöz tartozott: ebből folyt azután a törvény, melyet részben tapasztalás utján is igazoltak, hogy tudniillik különböző anyagok chemiai egyesülésénél ugyanazokhoz a termékekhez mindig ugyanaz a mennyiségű meleg volt szükséges, tekintet nélkül arra, hogy az egyesülés mily rendben és mily fokozatok között megy végbe.* Ha a mi nézetünk szerint magyarázzuk meg a chemiai folyamatok utján keletkező meleget, úgy az ama eleven erőnek mennyisége, melyet a chemiai vonzó erőnek meghatározott mennyisége hozhat létre, és a jelen esetben az erő megmaradásának törvényét a fenn említett törvény fejezné ki.

A mily kevéssé kutatták a meleg keletkezésére vonatkozó föltételeket és törvényeket, holott ilyenek kétségtelenül vannak, ép

* Hess. Poggd. Ann. L. 392. LVI. 598.

oly mértékben történt az a meleg eltünésére vonatkozólag is. Eddig mindössze is csak azokat az eseteket ismerjük, melyeknél chemiai egyesülések megszünnek, vagy finomabb halmazállapotok állanak elő, és ez által a meleg lappangóvá vált. Azt még sohasem kérdezték, vajjon eltünik-e meleg a mechanikai erő keletkezésénél? Pedig ez az erő megmaradásának szükségszerű követelménye. Én erre vonatkozólag csak is JOULEnak* egy kisérletét említhetem föl, mely eléggé megbízhatónak látszik. Ő ugyanis azt találta, hogy az a levegő, — mely egy 136·5 köbhüvelyknyi edényben 22 légkörű nyomás alatt állott, a mikor a szabad levegőre kiömlött, az őt körülvevő vizet 4·085° F.-kal hütötte le; ennyi melegre volt szüksége, hogy a szabad levegő ellenállását legyőzze. De nem állt elő hőmérsékletváltozás akkor, a midőn az említett nyomású levegő levegőmentes és ép oly köbtartalmú edénybe ömlött át, mely ugyanabban a víztartóban állott, mert most semmiféle ellenállást nem kellett legyőznie és semmiféle mechanikai erőt kifejtenie.

Most még azt kell megvizsgálnunk, mily viszonyban vannak CLAPEYRONnak** és HOLTZMANNnak*** a hő egyenértékére vonatkozó kisérleteik a mieinkhez. CLAPEYRON abból a megfontolásból indul ki, hogy a meleget, — a midőn az melegebb testből más hidegebb testbe megy át, — csak eszköz gyanánt használhatjuk fel a mechanikai erő létesítésére; és hogy a mechanikai erő maximumát akkor kell kapnunk, a mikor a meleg átvezetése egyenlő hőmérsékletű testek között történik; a hőmérsékváltozásokat azonban a melegített testnek összenyomása és kitágítása eszközli. De e maximumnak minden természeti testre nézve, melyek melegítés és lehűtés folytán mechanikai munkát végezhetnek, ugyanannak kell lennie. Mert tegyük fel, hogy különbözők: úgy az egyik testet, a melyben egy bizonyos hőmennyiség a nagyobb hatást létesíti, arra használhatnók fel, hogy mechanikai munkát nyerjünk, és e mecha-

* Philos. Magaz. XXVI. 369.

** POGGD. Ann. LIX. k. 446. 566.

*** Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim. 1845. Kivonata POGGD. Ann. Ergänzungsbd. II.

nikai munkának egy részét azután pedig arra, hogy a meleget visszafelé a másik test által a hidegebb forrásból ismét a melegebbe vezessük vissza, így aztán a végtelenig kapnánk mechanikai erőt, holott e mellett hallgatagon föltettük, hogy e folyamat által a hő mennyisége nem változik. CLAPEYRON e törvényt analytikailag a következö általános alakban fejezi ki:

$$\frac{dq}{dv}\cdot\frac{dt}{dp}-\frac{dq}{dp}\cdot\frac{dt}{dv}=C,$$

a hol q az a hőmennyiség, melyet valamely test magában foglal, t a test hőmérséklete, mind a kettő v térfogat és p nyomás függvényeiként kifejezve. $\frac{1}{C}$ a mechanikai munka, melyet a meleg egysége (mely 1 kg. vizet 1° C-kal fölmelegít) fejt ki. Ez minden természeti testre azonos lenne, de a hőmérséklet szerint változik. Gázokra nézve ez alak a következő:

$$C=v\frac{dq}{dv}-p\frac{dq}{dp}.$$

A mi ez alaknak általános érvényességét illeti, CLAPEYRONnak következtetései legalább a gázokra nézve nagyszámú tapasztalati analogiát foglalnak magukban. Az ő levezetése csak akkor engedhető meg, ha a meleg absolut mennyiségét változatlannak tekintjük; egyébként a gázokra vonatkozó specialis képlete, melyet egyedül az összehasonlítás alapján támogat a tapasztalás, HOLTZMANN képletéből is következik, mint azt mindjárt ki fogjuk mutatni. Az általános képletből csak azt iparkodott kimutatni, hogy az abból folyó törvény legalább nem mond ellent a tapasztalásnak. E törvény az, hogy ha — egyenlő hőmérsékletet véve — a különböző testekre ható nyomást kis mértékben emeljük, úgy hőmennyiségek fejlődnek, melyek a meleg által létesített kiterjedésükkel arányosak. Mindössze is egy, e törvényből folyó nagyon is valószínűtlen következtetésre óhajtom a figyelmet felhívni. A víz összenyomása folytán sűrűségének forduló pontjánál ugyanis nem meleg, hanem hideg keletkeznék.

Holtzmann abból a vizsgálódásból indul ki, hogy bizonyos hőmennyiség, melyet valamely gázzal közlünk, abban vagy hőmérsékletemelkedést létesít, vagy kiterjedést hőmérséklet emelkedése nélkül. Az e kiterjedés által létesíthető munkát vette ő fel a hő mechanikai egyenértékének, számításait Dulongnak hangkisérletei nyomán tette, melyek a gázok mindkét fajmelegének viszonyára támaszkodtak, és azt találta, hogy az a meleg, mely 1 kg. vizet 1° C-kal fölmelegít, 374 kilogrammot képes 1 méter magasságra fölemelni. A számításnak e módját a mi vizsgálódásunk csak akkor engedi meg, ha a hozzájáruló melegnek összes eleven ereje valósággal munkaerővé alakult át, azaz a szabad és kötött melegnek mennyisége — egyenlő hőmérséklet mellett — egészen ugyanaz erősebben kiterjedt gázoknál éppen úgy, mint a nagyobb sűrűségűeknél. Azután oly gáznak, mely munka véghezvitele nélkül terjed ki, nem kellene hőmérsékletét változtatnia, mint az — úgy látszik, hogy Joulenak fennemlített kisérletéből valósággal következik; továbbá rendes körülmények között a hőmérséklet emelkedése és csökkenése az összenyomás- és kitágulásnál valamely melegfejlődés folytán mechanikai erő által keletkeznék és megfordítva. Holtzmann törvényének helyessége mellett szól az abból folyó következtetéseknek egész sora, melyek a tapasztalással megegyeznek; nevezetesen ama képletek leszármaztatása, melyek a különböző hőmérsékletű gőzök rugalmasságára vonatkoznak.

Azokat a hőegyenértékeket, melyeket Holtzmann idegen kisérletekből 374-re számított ki, Joule saját kisérleteiből határozta meg és 481, 464, 479-nek találta, míg a surlódásból a hőegység erőegyenértékére 452 és 521-t kapott.

Holtzmannnak képlete megegyezik Clapeyronnak a gázokra vonatkozó képletével, csakhogy abban is feltalálható a C, a hőmérsékletnek határozatlan függvénye, mely által az integrál pontos meghatározása lehetségessé válik. Az első ugyanis a következő:

$$\frac{pv}{a} = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp},$$

a hol a a hőegység erőegyenértéke; a Clapeyroné pedig ez:

$$C = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp}.$$

E kettő akkor egyezik meg, ha $C = \frac{pv}{a}$, vagy — minthogy $p = \frac{k}{v}(1+at)$, a hol a a kiterjedési coëfficiens, k egy állandó szám — ha

$$\frac{1}{C} = \frac{a}{k(1+at)}.$$

$\frac{1}{C}$-nek Clapeyron által kiszámított értékei tényleg elég jól megegyeznek e képlettel, mint azt a következő összeállításból láthatjuk.

Hőmérséklet	Clapeyron számitása szerint			Képlet szerint
	a	*b*	*c*	
0°	1·410		1·586	1·544
35·5		1·365	1·292	1·366
78·8		1·208	1·142	1·198
100		1·115	1·102	1·129
156·8		1·076	1·072	0·904

Az *a* alatt levő számot a hangnak a levegőben való sebességéből számította ki; a *b* alatt levő sorozatot az æther, alkohol, víz, terpentinolaj gőzének lappangó melegéből; a *c* alatt levőket a vízpárák feszítő erejéből különböző hőmérséklet mellett. E szerint Clapeyronnak a gázokra vonatkozó képlete megegyezik a Holtzmannéval; de alkalmazhatósága szilárd és csepfolyós testekre egyelőre kétséges marad.[5]

V. Az elektromos jelenségek erőegyenértéke.

Statikai elektromosság. A gépelektromosság kétféle módon válhatik az erőnemzés okozójává: először a mennyiben *vezetőjével* mozog, tehát vonzó és taszító ereje által; másodszor a mennyiben *vezetőjében* mozog, tehát hőkifejlődés által. Az első mechanikai jelenségeket abból a körülményből vezették le, hogy két elektromos fluidumnak vonzó és taszító erői a távolság négyzetével fordított viszonyban hatnak. És azt találták, hogy a tapasztalati eredmények, a mennyiben azokat az elmélettel össze lehetett hasonlítani, a számítással megegyeznek. A kezdetben felállított következtetésünknek megfelelőleg, az erő megmaradásának az ily erőknél is érvényesnek kell lennie. Ép ezért az elektromosság mechanikai hatására vonatkozó specialis törvényekkel csak annyiban fogunk foglalkozni, a mennyiben azok az elektromos hőkifejlődés törvényének levezetésére szükségesek.

Legyen e_1 és e_2 két oly elektromos folyadék, melyek egysége olyan, hogy a tőle egységnyi távolságban levő egyenlő folyadékot az erő egységével taszítja; jelöljük továbbá az ellentétes elektromosságokat a folyadékoknak ellenkező előjeleivel és az e_1 és e_2 között levő távolságot r-rel: úgy középponti erejüknek intensitása

$$\varphi = -\frac{e_1 e_2}{r^2}.$$

A midőn e folyadékok R távolságból r-be mennek át, eleven erő nyereségük lesz:

$$-\int_R^r \varphi dr = \frac{e_1 e_2}{R} - \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Ha e folyadékok a ∞ távolságból r-be mennek át, elevenen erő nyereségük $-\frac{e_1 e_2}{r}$. Jelöljük ez utóbbi mennyiséget, mely a ∞-től az r-ig való mozgásnál felhasznált feszítő erőknek és nyert eleven erőknek összege, a mindkét elektromos folyadéknak r távolságra vonatkozó *potentiálja* nevével, — a jelölést Gauss a mágnességnél alkalmazta —: akkor valamely mozgásnál előálló eleven erő növekedés egyenlővé tehető ama potentiál fölöslegével, melyet az út végén kapunk és a kezdeti potentiálhoz viszonyítottunk.

Jelöljük meg ép így valamely elektromos folyadék potentiáljának összegét egy megelektromozott test valamennyi folyadékával szemben a folyadéknak a testre vonatkozó potentiálja nevével, és egy elektromos test valamennyi folyadékának potentiál-összegét egy másikkal szemben mindkét test potentiáljának nevével: úgy az eleven erő nyereséget ismét a potentiálok különbsége adja, föltéve, hogy az elektromosság eloszlása a testben nem változik, hogy tehát azok idioelektromos állapotúak. Ha az eloszlás a testekben megváltozik, akkor megváltozik az elektromos feszítő erők mennyisége is, s ekkor azután a nyert eleven erőnek is másnak kell lennie.

Bármily módon is végezzük az elektromozást, minden esetben egyenlő mennyiségű positiv és negativ elektromosságot kapunk. Két test elektromosságának kölcsönös kiegyenlítésénél, melyek egyike A épen annyi positiv elektromosságot tartalmaz, mint a mennyi negativot B, — az A positiv elektromosságának fele B-be, s a B elektromosságának fele viszont A-ba megy át. Legyenek a testeknek önmagukra vonatkozó potentiáljai W_a és W_b, egymásra vonatkoztatott potentiáljuk V, akkor az összes nyert eleven erőt úgy találjuk meg,[6] ha az átáramló elektromos folyadékoknak mindenik más tömegre és önmagára vonatkozó potentiálját, mely a mozgás előtt lép fel, levonjuk ugyane potentiálokból, melyek a mozgás után keletkeznek. E mellett meg kell jegyeznünk, hogy két folyadék potentiálja megváltoztatja előjelét, ha a folyadékok egyike előjelt cserél. Tehát a következő potentiálok önnek tekintetbe.

1. A mozgásba hozott $+\frac{1}{2}E$ potentiálja A-ból önmagára vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(W_b - W_a)$,
   a mozgásba hozott $-\frac{1}{2}E$-re vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(V - V)$,
   a nyugvó $+\frac{1}{2}E$-re vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(-V - W_a)$,
   a nyugvó $-\frac{1}{2}E$-re vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(-W_b - V)$.
2. A mozgásba hozott $-\frac{1}{2}E$ potentiálja B-ből önmagára vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(W_a - W_b)$,
   a mozgásba hozott $+\frac{1}{2}E$-re vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(V - V)$,
   a nyugvó $-\frac{1}{2}E$-re vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(-V - W_b)$,
   a nyugvó $+\frac{1}{2}E$-re vonatkoztatva ... $\frac{1}{4}(-W_a - V)$.

Összegük: $-\left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right)$.

Ime, ez a mennyiség adja ki a keletkező eleven erő maximumát és a feszítő erő mennyiségét, melyet az elektromozás útján nyerünk.

Hogy most e potentiálok helyett a számításban használatosabb fogalmakat vezessünk be, a következő megfigyelésre van szükségünk. Gondoljuk, hogy oly felületeink vannak, melyeken valamely belül fekvő elektromos folyadéknak egy vagy több elektromos testre vonatkozó potentiálja egyenlő értékű, és nevezzük ezeket egyenlő potentiálú felületeknek vagy niveaufelületeknek: akkor valamely elektromos folyadékrészecske mozgásának — az egyik felület valamely pontjától egy meghatározott másik felület valamely pontjába — az eleven erőt mindig egyenlő mennyiségben kell növelnie; míg ellenben a felületen történő mozgás a folyadékrészecske sebességét meg nem változtatja. E szerint az összes elektromos vonzóerők resultánsának a tér minden egyes pontjára nézve a rajtuk áthaladó niveaufelületeken merőlegesen kell állniok; és mindazoknak a felületeknek, melyeken a resultánsok merőlegesek, niveaufelületeknek kell lenniök.

Valamely vezetőben az elektromos egyensuly nem fog előbb beállani, míg az összes vonzó erők resultánsai — úgy a vezető elektromosságán, mint a még valahol jelenlevő más elektromozott testen — felületére merőlegesek nem lesznek; mert különben ez erőknek az elektromos folyadékrészecskéket a felület mentében kell eltolniok. Következőleg valamely elektromozott vezetőnek felülete mindenesetre niveaufelület lesz, és az eleven erő, melyet egy elenyészőleg csekély elektromos folyadékrészecske egyik vezető felületéről egy másik vezető felületére való átmenete alkalmából nyer, állandó. Legyen C_a az eleven erő, melyet a positiv elektromosság egysége akkor nyer, midőn A vezető felületéről a végtelen távolságba megy át, úgy, hogy C_a positiv elektromos töltéseknél positiv; továbbá A_a ugyancsak az elektromos folyadéknak A-ra vonatkozó potentiálja, ha ez A felületnek egy meghatározott pontjában fekszik; A_b ugyanaz B-re vonatkoztatva; W_a A-nak önmagára vonatkozó potentiálja, W_b ugyanaz B-re vonatkoztatva; V A-nak B-re vonatkozó potentiálja, és Q_a az elektromos mennyiség A-ban, Q_b pedig B-ben: úgy az eleven erő, melyet az e elektromos folyadékrészecske akkor nyer, a midőn a végtelen távolságból A-nak felületére kerül, lesz

$$-eC_a = e(A_a + A_b).$$

Ha most e helyébe az A felület valamennyi elektromos folyadékrészecskéjét sorba behelyettesítjük, továbbá A_a és A_b helyébe a megfelelő potentiálokat, és ez értékeket összeadjuk, úgy kapjuk:

$$-Q_aC_a = V + W_a.$$

Épp így B vezetőre is:

$$-Q_bC_b = V + W_b.$$

C állandónak nemcsak egy és ugyanazon vezető felületére nézve kell egyenlőnek lennie, hanem elkülönített vezetőkre is az esetben, ha ezek valamely összeköttetés létesítésénél egymással nem cserélnek ki elektromosságot; az az C állandónak egyenlőnek kell lennie mindama vezetőkre, melyeknek egyenlő szabad feszültségük van. Valamely elektromos test szabad feszültségének mértékéül az elektromosságnak azt a mennyiségét használhatjuk, mely — az eloszlási távolságon kivül az egységnyi sugarú gömbön felhalmozva, — az illető testtel elektromos egyensulyt tart. Ha az elektromosság a gömb fölött egyenletesen terjed szét, úgy az tudvalévőleg kifelé hat, mintha annak középpontjában teljesen összpontosult volna. Jelöljük az elektromosság mennyiségét E-vel, a gömb sugarát $R=1$-gyel, úgy a C állandó e gömbre nézve

$$C = \frac{E}{R} = E;$$

tehát a C állandó közvetlenül a szabad feszültséggel egyenlő.

Ezek után két vezető feszítő erőinek mennyisége, ha ezen vezetőkben egyenlő mennyiségű Q positiv és negativ elektromosság van, lesz:

$$-\left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right) = Q\left(\frac{C_a - C_b}{2}\right).^*$$

De mivel itt C_b negativ, tehát $C_a - C_b$ algebrai különbség az

* A müveleteket kellőképpen elvégezvén a jobboldalon $\frac{1}{2}Q(C_a + C_b)$ eredményt kapunk, s így $(C_a + C_b)$ az absolut értékek különbségével egyenlő. *F.*

absolut értékek összegével egyenlő. Ha B vezetőnek elvezető képessége igen nagy, tehát közel $C_b=o$, akkor az elektromos feszitő erők mennyisége:

$$\frac{QC_a}{2}=-\frac{V+W_a}{2};$$

ha pedig mindkét vezetőnek a távolsága is igen nagy, akkor az említett mennyiség $-\frac{1}{2}W_a$.

Azt találtuk, hogy két elektromos tömeg mozgásánál keletkező eleven erő egyenlő ez összeg $\frac{Q_aC_a+Q_bC_b}{2}$ változásával. Ezt az eleven erőt mechanikailag kapjuk, ha a sebesség, melylyel az elektromosság a testekben halad, elenyésző kicsiny az elektromos mozgásnak tovaterjedési sebességével szemben; hő gyanánt kell ez eleven erőnek jelentkeznie, ha ez az eset nem áll fenn. Következőleg az a hőmennyiség θ, mely egyenlő Q mennyiségű ellentétes elektromosságok megtöltésénél származik, lesz

$$\theta=\frac{1}{2a}Q(C_a-C_b),$$

a hol a a hőegység mechanikai erőegyenértéke; vagy ha $C_b=O$, mint a batteriáknál, melyek külső fegyverzete nem szigetelt és a levezetett felület nagysága S, úgy hogy $CS=Q$, a hőmennyiség:

$$\theta=\frac{1}{2a}\cdot QC=\frac{1}{2a}\cdot\frac{Q^2}{S}\cdot$$

Riess* kisérletek által bebizonyitotta, hogy az egyenlően készített palaczkoknak különböző megtöltésénél és különböző számánál a meleg, mely vezetősodronyának minden egyes részében kifejlődik, $\frac{Q^2}{S}$ mennyiséggel arányos. Nála S a palaczkok fegyverzetének felületét jelenti; de ennek egyenlően készített palaczkoknál a levezetett felület nagyságával arányosnak kell lennie. Az ő kisérleteiből azután Vorsselmann de Heer,** úgy mint Knochenhauer *** a

* Poggd. Ann. XLIII. 47.

** Poggd. Ann. XLVIII. 292. Ehez ugyanott van Riess megjegyzése, 320. l.

*** Ann. LXII. 364. LXIV. 64.

magáéiból azt következtették, hogy ugyanannak a batteriának ugyanoly megtöltése mellett a hőkifejlődése ugyanaz marad, bármiként is változtassuk a vezetősodronyokat. KNOCHENHAUER e törvényt még a zárósodronyok elágazására és a mellékáramokra is kiterjesztette. Az állandó $\frac{1}{2a}$ nagyságára vonatkozólag mind-eddig nem történtek kisérletek.

E törvényt könnyen megmagyarázhatjuk, mihelyt nem azt teszszük fel, hogy valamely batteriának megtöltése az elektromosságnak egy irányban való egyszerű mozgása, hanem azt, hogy az elektromosságnak ingaszerű ide-oda mozgása a két fegyverzet közt, mely mozgások mindig kisebbekké válnak, míg összes eleven erejüket az ellenállások összege meg nem semmisíti. Hogy a kisütő áram váltakozóan ellentétes irányú áramokból áll, a mellett először is annak váltakozóan ellentétes irányú mágnesező hatása tanuskodik; másodszor az a tünemény, melyet WOLLASTON vett észre, midőn a vizet elektromos átütések által szétbontotta, hogy tudniillik a két gáznem a két különböző elektródon fejlődött ki. Föltevésünk egyúttal azt is megmagyarázza, miért kellett az elektródoknak e kisérletnél lehetőleg kis felületüeknek lenni.

Galván elektromosság. A galván elektromosság tüneményeinél a vezetőknek két osztályát különböztetjük meg: 1. azokat, melyek úgy vezetnek mint a fémek és a galvános feszültségi sorozat törvényének hódolnak; 2. azokat, melyek e törvényt nem követik. Ez utóbbiak mindannyian összetett folyadékok, és ha áramot vezetünk rajtuk keresztül, szétbontásuk az átáramló elektromosság mennyiségével arányosan történik.

E szerint kísérleti tényeinket feloszthatjuk: 1. olyanokra, melyek csak két első osztályú vezetőnél fordulnak elő, mint egymással érintkező különböző fémeknek megtöltése különböző elektromossággal; és 2. olyanokra, melyek mind a két osztályú vezető között jönnek létre, mint a nyitott láncznak elektromos feszültségi különbségei és a zártnak elektromos áramai. Az első osztályú vezetőknek bármily csoportosítása mellett sem tudunk soha elektromos áramokat teremteni, hanem csak elektromos feszültségeket. De e feszültségek nem egyenértékűek egy bizonyos erőmennyiséggel, mint a hogy azt eddig találtuk, melyek az elektromos egyensuly megzavarását jelentették: sőt inkább a galvános feszültségek az elektromos egyensuly helyreállítása folytán állottak elő, ez által az elektromosságnak semmiféle mozgása nem jöhet létre a vezetők helyzetváltozásán kívül, még a kötött elektromosságnak megváltoztatott elosztása mellett sem. Gondoljuk, hogy valamennyi fémet, a mely csak van földünkön, egymással érintkezésbe hoztunk és az elektromosságnak megfelelő eloszlás be is következett; úgy azok között bármiféle más összeköttetést létesíthetünk, még sem lesz elektromos szabad feszültségükben mindaddig változás, míg egy másodosztályú vezetővel nem állt elő érintkezés. Érintési erő az, mely két különböző fémnek érintkező helyén hat, különböző elektromos feszültségüket létesíti és fenntartja; ennek az erőnek fogalmát még eddig közelebbről nem határozták meg, mert ez által az első és másodosztályú vezetők érintkezésének tüneményeit is iparkodtak összefoglalni oly időben, midőn mindkét tünemény különbségét, a chemiai folyamatot, mint ilyent még nem ismerték. A fogalom felfogásának ilyetén kép szükségessé vált bizonytalanságában az érintő erő csakugyan olyannak látszik, mint a mely a végtelenig létesíthet szabad elektromos mennyiségeket és ezekkel együtt mechanikai erőket, hőt és fényt, mihelyt van egy másodosztályú vezetőnk, mely a vezetés folytán nem elektrolyzálódik. Épp ez a körülmény is az mely az érintési elméletnek, — noha az a tüneményeket egyszerűen és szabatosan magyarázta, oly határozott magatartással ellene szegült.* Az említett erőnek eddigi fogalma egyenesen ellentmond annak az elvnek, melyet itt életbe fogunk léptetni, hacsak el nem ismerik, hogy amott a chemiai folyamatok befogadása szükséges. De ha ez megtörténik, vagyis, ha fölveszszük, hogy a másodosztályú vezetők épp azért nem hódolnak a galvános feszültségi sorozatnak, mert csak elektrolysis folytán vezetnek, úgy az érintő erő fogalma lényegesen egyszerűvé válik és visszavezethető vonzó és

* L. Faraday Experimentaluntersuchungen über Electricität. 17. sorozat. Philos. Transact. 1840. p. I. No. 2071. és Poggd. Ann. LIII. 568.

taszító erőkre. Most ugyanis minden tünemény az első osztályú vezetőkben abból a föltevésből származtatható le, hogy a különböző chemiai anyagoknak mindkét elektromássággal szemben különböző vonzó erejük van és hogy e vonzó erők csak mérhetetlen kis távolságban hatnak, míg az elektromosságok egymásra nagyobb távolságban is képesek hatást gyakorolni. E szerint az érintő erő nem lenne más, mint a vonzó erők különbsége, melyet az érintkező helyhez legközelebb fekvő fémrészecskék e helyek elektromosságára gyakorolnak; és az elektromos egyensuly akkor áll be, ha egy elektromos folyadékrészecske, mely az egyiktől a másikhoz megy át, eleven erőben többé mit sem veszít, vagy mit sem nyer. Legyen c_1 és c_2 a két fém szabad feszültsége, a_1e és a_2e az eleven erő, melyet e elektromos folyadékrészecske akkor nyer, midőn az egyik vagy a másik meg nem töltött fémre megy át; úgy az erő, mely akkor keletkezik, ha a folyadékrészecske az egyik megtöltött fémről a másikra megy át a következő:

$$e(a_1-a_2)-e(c_1-c_2).$$

Egyensuly esetén e kifejezésnek nullnak kell lennie, tehát

$$a_1-a_2=c_1-c_2,$$

azaz ugyanazoknak afémeknek különböző részeiben föllépő feszültségi különbségnek állandónak kell lennie és különböző fémeknél a galvános feszültségi sor törvényét kell követnie.

A galvánáramoknál az erő megmaradását illetőleg főképpen a következő hatásokat kell tekintetbe vennünk: a hőkifejlődést, a chemiai folyamatokat és a polarizálást. Az elekrodynamos hatásokat a mágnességnél fogjuk tárgyalni. A hőkifejlődés mindenik áramnál előfordúl; a mi a másik két hatást illeti, czélunknak megfelelőleg megkülönböztethetünk oly áramokat, melyek csak chemiai szétbontást, olyanokat, melyek csak polarizálást és olyanokat, melyek szétbontást és polarizálást együtt hoznak létre.

Az erő megmaradására vonatkozó föltételeket legelőbb oly lánczoknál fogjuk megvizsgálni, melyeknél nincs polarizálás, mert csakis ezek azok, melyekre nézve mostani meghatározott, mérések által kitapasztalt törvényeink vannak. n számú elemből álló láncznak áramintensitását J-t az OHM-féle törvény adja, és lesz

$$J = \frac{nA}{W},$$

a hol A állandó az egyes elemek elektromotoros erejét és W a láncz ellenállását jelöli; A és W e lánczokban az intensitástól függetlenek. De mivel ily lánczokban hatásuknak bizonyos időtartama alatt semmi más nem változik, mint a chemiai viszonyok és a meleg mennyisége; úgy az erő megmaradásának törvénye azt követelné, hogy az a meleg, melyet a végbement chemiai folyamat által nyerni fogunk, egyenlő legyen azzal, a mit valósággal nyertünk. Valamely fémvezető egyszerű részében, ha ellenállása W, a t idő alatt kifejlődött meleg LENZ * szerint:

$$\vartheta = J^2wt,$$

föltéve, hogy w ellenállásnak egységéül azt a sodronyhosszat vettük, melyben az áram egysége az időegység alatt a hőegységet fejleszti ki. Elágazott vezetősodronyoknál, hol az egyes ágak ellenállásait w_a-val jelöljük, az összes ellenállást w-t a következő egyenlet határozza meg:

$$\frac{1}{w} = \Sigma\left[\frac{1}{w_a}\right],$$

J_n intensitást a w_n ágban

$$J_n = \frac{Jw}{w_n},$$

egyenlet által nyerjük, tehát ϑ_n meleget ugyanabban az ágban

$$\vartheta_n = J^2w^2\frac{1}{w_n}t,$$

és az egész elágazott vezetőben kifejlődött meleget adja

$$\vartheta = \Sigma[\vartheta_a] = J^2w^2\Sigma\left[\frac{1}{w_a}\right]t = J^2wt$$

* L. POGGD. Ann. LIX. p. 203. és 407. Bull. de l'acad. d. sciènc, de St. Pétersbourg. 1843.

egyenlet. Következőleg, ha Lenz törvénye folyadékos vezetőkre is áll, mint azt Joule kimutatta, — valamely tetszőleges elágazással biró lánczban a kifejlődött összes meleg:

$$\Theta = J^2 Wt = nAJt.$$

Állandó elemeinket két fajtájú csoportba oszthatjuk, még pedig a melyek a Daniel-féle, s melyek a Grove-féle összeállítás szerint vannak szerkesztve. Az első rendszerűeknél a chemiai jelenség a következő: a positiv fém valamely savban feloldódik és a negativ ugyane savban egy oldatából lecsapódik. Vegyük fel az áramintensitás egységéül azt az intensitást, mely az időegység alatt egy egyenérték vizet bont szét (körülbelől $O = 1$ *grm* véve); úgy t idő alatt feloldódik a positiv fémnek nJt egyenértéke és épp ugyanannyi csapódik le a negativ fémből. Ha most a_z az a meleg, melyet a positiv fém egyenértéke oxydálásánál és az oxydnak oldásánál a megfelelő savban fejleszt, és a_c a negativénél; úgy az a meleg, mely chemiai úton származnék

$$= nJt(a_z - a_c).$$

Ime, a chemiailag fejlődött meleg akkor lesz az elektromos úton származottal egyenlő, ha

$$A = a_z - a_c,$$

azaz, ha két Daniel-féle módon összeállított fémnek elektromotoros ereje arányos volna az elégésüknél és a savakkal való összeköttetésüknél fejlődő meleg különbségével.

A Grove-féle rendszer szerint készített elemeknél a polarizálás az által szünik meg, hogy a kiváló hydrogent rögtön ama folyadék oxygengazdag alkotórészének átváltoztatására használjuk fel, melybe a negativ fém merül. E csoporthoz számíthatjuk a Grove és Bunsen-féle elemeket: amalgamált zincum, higitott kénsav, füstölgő salétromsav, platina vagy szén, továbbá a chromsavval készített lánczokat, a melyek közül pontosabb méréseknek voltak alávetve: amalgamált zincum, higított kénsav, savas chromsavas kalinak oldata kénsavval, réz és platina. A chemiai folyamat mindkét salétromsavas lánczban ugyanaz, épp úgy mint a chromsavasakban, a miből az imént levezetett következtetésünk szerint levonhatjuk, hogy az elektromotoros erők is egyenlők, és Poggendorff* mérései szerint ez az eset teljes pontossággal fenn is áll. A szént tartalmazó chromsavas elem éppenséggel nem állandó és — legalább kezdetben — jóval nagyobb elektromotoros ereje van; azért is ezt nem ide, hanem a polarizálódó lánczokhoz kell számitanunk. Ezeknél az állandó lánczoknál, mint látjuk, az elektromotoros erő a negativ fémtől nem függ. Az utóbbi lánczokat a Daniel-félék typusára vezethetjük vissza, ha a salétromsavnak és a chromoxydnak a platinához legközelebb eső részecskéit tekintjük a folyadékkal közvetlenül érintkező első osztályú vezetők utolsójának; úgy, hogy a Grove és Bunsen-féle elemeket olyképp értelmezhetjük, mintha zincum és salétromos savas lánczok, a chromsavas szerkezetűeket, mintha zincum és chromoxyd lánczok volnának.

A polarizálódó lánczoknál megkülönböztetünk olyanokat, melyek csak polarizálódnak és semmiféle chemiai szétbontást nem idéznek elő, azután olyanokat, melyek mind a két tüneményt létrehozzák. Az elsőkhöz, melyek nem állandó és csakhamar megszünő áramot adnak, az egyszerű lánczok közül a Faraday-félék** tartoznak, marókáli oldat, kénkáli és salétromsavból képezett összetételek; továbbá az erősebb negativ fémek közönséges savakban, ha a positiveket a savak föloldani nem képesek, pl. réz ezüsttel, arany, platina, szén kénsavban stb. Az összetett lánczok közül beigtatott szétbontási cellákkal mindazok, melyeknek polarizálása más elemek elektromotoros erejét felülmulja. E lánczok intensitására vonatkozó pontos mérési kisérleteket, az áram erős változása miatt még mindeddig nem tettek. Általában véve úgy látszik, hogy áramuknak intensitása a bemerült fémek természetétől függ, tartama a felületek nagyságával és az áramintensitás gyengülésével nő. Megujíthatjuk e lánczokat — még akkor is, ha erejük majdnem

---

* Poggd. Ann. LIV. 429. és LVII. 104.

** Experimentaluntersuchungen über Electricität. 16. sorozat. Philos. Transact. 1840. 1. l. és Poggd. Ann. LII. 163. és 547.

teljesen elveszett — a lemezeknek a folyadékban való mozgása és a léggel való érintkezése által, mert ily módon a hydrogenlemezek polarizálását megszüntetjük. Ily befolyásokból eredhet az áramnak csekély, meg nem szűnő maradéka, melyet finom galvanometriai eszközök mindig ki szoktak mutatni. Az egész jelenség tehát nem más, mint a folyadékrészecskék elektromos egyensulyának helyreállítása a fémekkel szemben ; a mikor is úgy látszik, hogy majd a folyadékrészecskék rendezkednek máskép, majd — legalább is sok esetben * — a felületi fémrétegek chemiai változást is szenvednek. Az összetett lánczoknál, a hol az eredetileg egyenlő lemezeknek polarizálása más elemek áramának hatása, az eredeti áramnak ilyeténképp elveszett erejét visszanyerhetjük mint secundär áramot, ha a gerjesztő elemeket eltávolítottuk és a polarizált fémeket egymással összekötöttük. Az erő megmaradásának elvét itt pontosabban nem alkalmazhatjuk, mert mindeddig még semmiféle specialis ténynyel nem rendelkezünk.

A legbonyolultabb eset azoknál a lánczoknál fordul elő, melyeknél polarizálás és chemiai szétbomlás együtt mennek végbe. Ide tartoznak azok a lánczok, melyekben gázfejlődés van. Ezeknek árama, épp úgy mint a tisztán polarizálódó lánczoké, a kezdetben legerősebb, majd gyorsabban vagy lassabban sülyed le egy eléggé állandóan megmaradó nagyságra. Az ily fajtájú elemeknél és csupán ily elemekből alkotott lánczoknál, csak igen lassan szünik meg a polarizáló áram, míg állandó lánczoknak egyes nem állandóakkal való csoportosítása által igen könnyen és gyorsan kaphatunk áramokat, föltéve, hogy a nem állandó lánczok lemezei aránylag kicsinyek. Eddigelé ez összeállítás mellett csak igen kevés mérési sorozatot vittek végbe. Azon kevesek közül, melyekre rátaláltam, legnevezetesebbek a Lenz** és Poggendorffféi,*** hogy tudniillik az ily lánczok intensitását különböző sodrony-ellenállások mellett az egyszerű Ohm-féle törvény nem határozhatja meg, hanem ha azok

---

* L. Ohm. Poggd. Ann. LXIII. 389.

** Poggd. Ann. LIX. 229.

*** Ann. LXVII. 531.

állandóit csekély intensitásoknál kiszámítjuk, a számolás eredménye nagyobb intensitásokra nézve igen nagy. Ezért annak számlálóját vagy nevezőjét, vagy mind a kettőt az intensitás függvényeinek kell tekintenünk; de az eddig ismert tényekből nem dönthetjük el, vajjon ez esetek melyikének van helye.

Ha az erő megmaradásának elvét az áramokra akarnók alkalmazni, úgy azokat két részre kell osztanunk: még pedig a nem állandó vagy polarizálódó áramra, melyeknél mindazok érvényesek, a miket a tiszta polarizaczio-áramokról mondottunk; azután állandó vagy szétbontó áramra. Ez utóbbira azt a meggondolási módot alkalmazhatjuk, melyet a gázfejlődés nélkül való állandó áramoknál használtunk. Az áram által létesített melegnek egyenlőnek kell lennie azzal, melyet chemiai folyamat teremt. Pl. zincum és egy negativ fém higított kénsavba merülnek; legyen e szerkezetben egy atom zincumnak — feloldásánál és a hydrogen kiüzésénél — kiszabadult melege $a_z - a_h$ úgy a dt idő alatt kifejlődött meleg

$$J(a_z - a_h)\,dt.$$

Ha most ily láncz minden részében a melegkifejlődés az intensitás négyzetével arányos lenne, tehát $J.^2 Wdt$-t tenne ki, úgy épp mint előbb az

$$J = \frac{a_z - a_h}{W}$$

egyenletet kapnók, mely az egyszerű Ohm-féle alak. De mivel ez itt nem alkalmazható, úgy az következik, hogy vannak a lánczban keresztmetszetek, melyeknél a hőkifejlődés más törvénynek hódol, melynek ellenállását e szerint állandónak nem vehetjük fel. Most legyen pl. valamely keresztmetszetben a kiszabadult meleg az intensitással egyenesen arányos, mint a hogy egyébként a halmazállapotváltozás folytán megkötött melegnek lennie is kell, tehát $\vartheta = \mu J dt$, akkor

$$J(a_z - a_h) = J^2 w + J\mu,$$

és

$$J = \frac{a_z - a_h - \mu}{w}.$$

A μ mennyiség e szerint az OHM-féle képlet számlálójában fordulna elő. Egy ily keresztmetszet ellenállása pedig $w = \frac{\vartheta}{J^2} = \frac{\mu}{J}$ lenne. De ha annak melegkifejlődése az intensitással nem pontosan arányos, tehát a μ mennyiség nem egészen állandó, hanem az intensitással növekszik, úgy arra az esetre jutunk, mely LENZ és POGGENDORFF észleléseinek megfelel.

Az ily láncz elektromotoros erejének — mihelyt a polarizaczio-áram megszűnt, az állandó lánczokkal megegyezőleg — a zincum és hydrogen között fellépő elektromotoros erőt mondjuk. Az érintési elmélet kifejezési módjával élve a zincum és a negativ fém közt fellépőt mondanók a láncz elektromótoros erejének, természetesen levonva belőle az utóbbinak hydrogenben történő polarizálását. A polarizálás maximumát most csak az áram intensitásától kell függetlennek tekintenünk, és a különböző fémekre nézve épp annyi különbözőt kell fölvennünk, mint a mennyiben e fémek elektromotoros erői különböznek. De az OHM-féle képlet számlálójában, ha azt a különböző ellenállásoknál az intensitás-mérésekből számítjuk ki, az elektromotoros erőn kívül egy összeadandó is előfordulhat, a mely az átmeneti ellenállásból származik és a mely különböző fémeknél talán különböző is. Hogy egy átmeneti ellenállás tényleg van, az erő megmaradásának elve értelmében abból a tényből következik, hogy e lánczoknak intensitásait nem az OHM-féle törvény szerint kell kiszámítanunk, noha a chemiai folyamatok ugyanazok maradnak. Még nem akadtam semmiféle biztos észleletre, vajjon oly lánczokban, melyekben a polarizaczio-áramok megszüntek, az OHM-féle képlet számlálója függ-e a negativ fém természetétől? Hogy itt a polarizaczio-áramokat gyorsan elhárítsuk, szükséges az áram sűrűségét a polarizálódó lemezeken lehetőleg növelni, részint állandó elektromotoros erejű czellák beiktatása, részint e lemezek felületének kisebbítése által. LENZ és SAWELJEW * idevágó kisérleteiben — saját tudósításuk szerint — nem jutottak el az áramok állandóihoz, minthogy az általuk kiszámított elektro-

* Bull. de la classe phys. math. de l'acad. d. scienc. de St. Pétersbourg. T. V. 1. l. és POGGD. Ann. LVII. 497.

motoros erők még a polarizaczio-áramokéit is magukban foglalják. Ők a következő értékeket találták : zincum és rézre kénsavban 0·51, zincum és vasra 0·76, zincum és kénesőre 0·90.

Végre még megjegyzem, hogy JOULE * tett oly kisérletet, melynek alapján bebizonyítani iparkodott, hogy a chemiai és elektromos úton kifejlődött meleg egyenlő. Mind a mellett mérési módszerei ellen némi kifogásolni valónk van. Pl. a tangens-törvényt a tangensbussolára nézve a legnagyobb mértékig érvényesnek ismeri el; nincsenek állandó áramai, hanem intensitásukat csak a kezdeti és végső eltérés módja szerint számítja; továbbá a gázfejlődéses czellák elektromotoros erejét és ellenállását állandónak veszi fel. Hogy a meleg mennyiségére vonatkozó meghatározásai mily mértékben tértek el a másutt talált számadásoktól, arra már HESS tett bennünket figyelmessé. Ugyanazt a törvényt BECQUEREL E. is feltalálta és empirikusan bizonyítja be, jelentése a *Comptes rendus*ben van. (1843. 16. sz.)

Fönnebb láttuk, hogy kényszerítve voltunk az érintő erő fogalmát egyszerű vonzó és taszító erőkre visszavezetni, ha azt elvünkkel akarjuk összeegyeztetni. Kiséreljük meg most a fémek és folyadékok között levő elektromos mozgásokat is arra visszavezetni. Gondoljuk, hogy valamely folyadék összetett atomjainak részei az elektromossággal szemben különböző vonzó erővel felruházottak és ennélfogva különböző elektromosságuak. Ha ez atomrészek a fémelektródokon válnak ki, ugy az elektrolysis törvénye értelmében minden atom egy bizonyos — elektromos erejétől független $\pm E$ tömeget ad át az elektródoknak. E jelenséget épp ezért úgy is képzelhetjük, hogy a vegyi egyesüléseknél is már mindenik atom $\pm E$ egyenértékkel van felruházva, mely mindegyiknél épp úgy egyenlő, mint a mérlegelhető anyagok stöchiometrikus egyenértéke a különböző egyesüléseknél. Meritsünk most valamely folyadékba két különbözö elektromosságú fémet a nélkül, hogy chemiai folyamat keletkeznék : akkor annak positiv alkotó részeit a negativ fém, a negativet pedig a positiv vonzaná. Az eredmény tehát az lesz, hogy

* Philos. Magaz. 1841. vol XIX. 275. l. és 1843. XX. 204. l.

a különböző elektromos folyadékrészecskék iránya és elosztása megváltozik és épp ez utóbbi jelenség nyilvánulása az, a mit polarizaczio-áramnak mondunk. Ez áram mozgató ereje a fémek elektromos különbsége lenne, és azért kezdeti intensitásával arányosnak is kellene lennie; tartamának — a tömeg egyenlő intensitása mellett — a lemezeken elhelyezkedő atomokkal, tehát felületével kellene arányosnak lennie. Ezzel szemben chemiai szétbomlással összekötött áramoknál a folyadékrészecskéknek a fémekkel való állandó egyensulya nem áll elő, mert a positiv fémnek positiv megtöltött felülete állandóan eltávolittatik az által, hogy maga is a folyadék alkotó részévé válik s ez által mögötte a töltés folytonos megujulásának be kell következnie. A positiv fém mindenik atomja — mely a positiv elektromosság egy egyenértékével egyesülve az oldatba lép be és ennek fejében a negativ alkotórész egy atomja neutral-elektromosan válik ki — a már egyszer megkezdett mozgásnak gyorsulását fogja előidézni, mihelyt az első atomnak a $\pm E$-hez való vonzóereje a_z mennyiségét tekintve nagyobb, mint az utóbbi vonzóerejének mennyisége a_c. Ily körülmények között a mozgás sebessége természetesen a végtelenig növekednék, hacsak vele egyúttal a melegkifejlődés folytán az eleven erőbeli veszteség is nem nőne. És pedig mindaddig fog nőni, míg e veszteség, $J^2 Wdt$ egyenlő nem lesz a felhasznált feszítő erővel $J(a_z - a_c)dt$-vel, vagyis a mikor

$$J = \frac{a_z - a_c}{W}.$$

Azt hiszem, a galvánáramok ilyen megkülönböztetése — hogy tudniillik vannak olyanok, melyek polarizálást, és olyanok, melyek szétbontást hoznak létre, mint azt az erő megmaradásának elve föltételül ki is köti, — arra az egyetlen útra vezethet, melyen úgy a chemiai, mint az érintési elmélet nehézségeit kikerülhetjük.

Thermoelektromos áramok. Ez áramoknál az erő forrását a Peltier által fölfedezett forrasztási helyekre való hatásokban kell keresnünk, melyekben egy az adott árammal ellenkező irányú áram keletkezik.

Gondoljunk egy hydroelektromos áramot, melynek vezető sodronyában egy darab más fajtájú fémet forrasztottunk be, melynek forrasztási helyein a hőmérsékletek t_1 és t_2: akkor az elektromos áram dt időrészecske alatt az egész vezetékben $J^2 W dt$ meleget fog fejleszteni, ezen kivül az egyik forrasztási helyen $q_1 dt$-t létesíteni, a másikon $q_2 dt$-t fölemészteni. Ha A a hydroelektromos láncz elektromotoros ereje, tehát $AJdt$ a chemiai úton keletkező meleg, úgy az erő megmaradásának elvéből következik, hogy

$$AJ = J^2 W + q_1 + q_2 . \qquad 1)$$

Ha B_t a thermoláncz elektromotoros ereje, föltéve hogy az egyik forrasztási hely t hőmérsékletű, de a másik hőmérséklete állandó pl. 0° ; úgy az egész lánczra nézve :

$$J = \frac{A - B_{t_1} + B_{t_2}}{W} . \qquad 2)$$

Midőn $t_1 = t_2$, akkor :

$$J = \frac{A}{W} .$$

Ez értéket használjuk fel az 1) egyenletben, úgy

$$q_1 = q_2 ,$$

azaz ha ugyanannak a fémnek forrasztási helyei egyenlő hőmérsékletűek és az áram intensitása egyenlő, kell, hogy a kifejlődött és fölemésztett melegmennyiségek egyenlők legyenek, bármilyen is a keresztmetszet. Ha még azt is fölvehetnők, hogy e jelenség a keresztmetszet bármely pontjában ugyanaz, úgy következik, hogy a melegmennyiségek — melyeket ugyanaz az áram a különböző keresztmetszetek egyenlő felületeiben létrehoz — úgy aránylanak, mint az áram sűrűségei, és ebből azután ismét, hogy a különböző áramok által az egész keresztmetszetben kifejlesztett hőmennyiségek egyenes arányban állanak az áramok intensitásaihoz.

Különböző hőmérsékletű forrasztási helyekre vonatkozólag az 1) és 2) egyenletből következik

$$(B_{t_1} - B_{t_2}) J = q_1 - q_2 ,$$

hogy egyenlő áramintensitások mellett a meleget fejlesztő és megkötő erő a hőmérséklettel épp oly mértékben emelkedik, mint az elektromotoros erő.

Mindeddig nem ismerek mérési kisérleteket, melyek e két következtetés bármelyikére vonatkoznának.

VI. A mágnesség és elektromágnesség erőegyenértéke.

Mágnesség. Minden mágnes képes — vonzó és taszitó erejénél fogva — más mágnesekkel és a nem mágneses vassal szemben bizonyos eleven erőt létesiteni. Mivel a mágnesek vonzási tüneményeit teljesen levezettük két oly fluidum fölvétele segitségével, melyek a távolság négyzetével forditottan vonzzák és taszitják egymást. úgy már e körülményből magából folyik az értekezésünk elején adott következtetés, hogy a mágneses testeknek egymásellenében való mozgásánál az erő megmaradásának fenn kell állania. E mozgások törvényeivel csakis az indukálásnak következő elmélete miatt kell behatóbban foglalkoznunk.

1. Legyen m_1 és m_2 két mágneses tömegelem, melyek egysége olyan, hogy ugyanakkora tömeget a távolság egységéből az erő egységével taszit; jelöljük az ellentétes mágnességeket a tömegek ellentétes előjeleivel; legyen továbbá m_1 és m_2 között a távolság r: úgy középponti erejük intensitása

$$\varphi = -\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Az eleven erőbeli nyereség a végtelen távolságból az r-be való átmenetnél

$$-\frac{m_1 m_2}{r}.$$

2. Jelölje e mennyiség mindkét elem potentiálját, és használjuk fel a potentiál elnevezést a mágneses testeknél épp úgy mint az elektromosságnál felhasználtuk: akkor két oly test mozgásánál, melyek mágnessége nem változik, tehát az aczélmágnesekénél, az

eleven erőbeli nyereséget megkapjuk, ha a mozgás végének megfelelő potentiálértéket a mozgás kezdetének megfelelőéből kivonjuk. Ellenben, oly mágneses testek mozgásánál, melyek eloszlása változik, az eleven erőbeli nyereség — épp úgy mint az elektromosságban — a

$$V+\tfrac{1}{2}(W_a+W_b)$$

összeg változása által mérhető, a hol V a testek potentiálja egymással szemben, W_a és W_b a testeknek önmagukra vonatkoztatott potentiálja. Ha B test változatlan erejű aczélmágnes, úgy valamely változó mágnességű test közeledése folytán eleven erő keletkezik, mely egyenlő $V+\tfrac{1}{2}W_a$ összeg növekedésével.

3. Ismeretes, hogy valamely mágnesnek kifelé való hatása mindenkor helyettesíthető a mágneses fluidumok bizonyos eloszlása által a mágnes felületén. E szerint a mágnesek potentiálja helyett azok felületeinek potentiáljait tehetjük. Akkor — épp mint a vezető elektromos felületeken — valamely teljesen lágy vasnál A, melyet B mágnesnek eloszlása által mágnesezünk meg, az eleven erő nyereségét a következő egyenlet adja:

$$-QC=V+W_a\,,$$

a hol C eleven erőbeli nyereség a positivnak jelölt mágnesség menynyiségének egységére vonatkozik a vas felületéről a végtelen távolságba való átmenet alkalmával.

De mivel minden mágnesben épp annyi az északi, mint a mennyi a déli mágnesség, úgy Q mindenikben nullal egyenlő; ebből következik, hogy oly vasdarabnál vagy ugyanily alakú, helyzetű és mágneses eloszlású aczéldarabnál, melynek mágnességét B mágnes teljesen megköti:

$$V=-W_a\,.$$

4. De V az az eleven erő, melyet az aczélmágnes közeledése alkalmával mágnességének megkötéséig létesít; ez egyenlet értelmében az eleven erőnek mindig ugyanannak kell lennie, tekintet nélkül arra, vajjon melyik mágneshez közeledik, csak a teljes megkötés következzék be, mert W_a mindig ugyanaz marad. Ezzel

szemben valamely vele egyenlő vasdarab eleven ereje, melylyel a mágnesség ugyanoly eloszlásának beálltáig közeledünk, mint fennláttuk a következő:

$$V+\tfrac{1}{2}W=-\tfrac{1}{2}W,$$

ime tehát csak fél akkora, mint a milyen a már megmágnesezett darabé. Meg kell itt gondolnunk, hogy W maga negativ, így $-\frac{1}{2}W$ mindig positiv.

Ha valamely még meg nem mágnesezett aczéldarabbal a megosztó mágneshez közeledünk és az a nyert mágnességet az eltávolitás után is megtartja: úgy e mellett $-\frac{1}{2}W$ vész el mechanikai erőben, de ennek fejében a jelenlegi mágnes oly helyzetben van, hogy $-\frac{1}{2}W$ munkával többet végezhet, mint az elébb aczéldarab alakjában tehette.

Elektromágnesség. Az elektrodynamos tüneményeket Ampère vezette vissza az áramelemek vonzó és taszító erőire, melyek intensitása az áramok sebességétől és irányától függ. De az ő következtetése az indukálás tüneményeit nem öleli át. Ez utóbbiakat viszont az elektrodynamos tüneményekkel együtt Weber W. vezette vissza az elektromos fluidumok vonzó és taszító erőire, melyek intensitása azok közeledési vagy távolodási sebességétől és növekedésétől függ. Mostanig még nem állitottak fel hypothesist, melynek alapján e tüneményeket állandó középponti erőkre lehessen visszavezetni. Az indukált áramok törvényét Neumann* fejtette ki, a mennyiben az egész áramra tapasztalatilag feltalált Lenz-féle törvényt annak legkisebb részeire is érvényesítette a mi zárt áramoknál, Weber következtetéseivel teljesen megegyezik. Épp így megegyeznek Ampèrenek és Webernek az elektrodynamos hatásokra vonatkozó törvényei zárt áramoknál azzal a következtetéssel, melyet Grassmann** e jelenségekre a forgási erőkből kiindulva állított fel. Ezeken kívül a tapasztalás sem ád további felvilágosítást, mert eddigelé csak zárt vagy majdnem zárt áramokkal tettek kisérleteket. Mi elvünket is épp ezért csak zárt áramokra fogjuk alkalmazni,

* Poggd. Ann. LXVII. 31.

** Ann. LXIV. 1.

és ki fogjuk mutatni, hogy abból ugyanazok a törvények folynak. Már AMPÈRE kimutatta, hogy valamely zárt áram elektrodynamos hatásait mindenkor helyettesíthetjük a mágneses folyadékoknak valamely tetszőleges az áram által körülkerített felületen történő meghatározott eloszlása által. Miért is NEUMANN a potentiál fogalmát a zárt áramokra átvitte, a mennyiben azt egy ily felület potentiáljával helyettesítette.

5. Ha valamely mágnes egy áram befolyása alatt mozog, úgy az eleven erőt, melyet e mellett nyer, azoknak a feszítő erőknek kell szolgáltatniok, melyek az áramban felhasználódtak. Ez értékek dt időrészecske alatt — a fennt használt jelölési mód szerint — $AJdt$ hőegységekben, vagy $aAJdt$ mechanikai egységekben, ha a a hőegység mechanikai egyenértéke. Az áram utjában létesített eleven erő $aJ^2 Wdt$, a mágnestől nyert eleven erő $J\frac{dV}{dt}dt$, a hol V a mágnes potentiálja az áramegység által befutott vezetővel szemben. Tehát

$$aAJdt = aJ^2 Wdt + J\frac{dV}{dt}dt,$$

következőleg

$$J = \frac{A - \frac{1}{a}\frac{dV}{dt}}{W}.$$

Az $\frac{1}{a}\frac{dV}{dt}$ mennyiséget ujabb elektromotoros erőnek foghatjuk fel, még pedig az indukáló áram elektromotoros erejének, mely mindig amaz erő ellenében működik, mely a mágnest saját irányában mozgatni, vagy mely sebességét növelni iparkodik. Mivel ez az erő az áram intensitásától független, kell hogy ugyanaz maradjon akkor is, ha a mágnes mozgása előtt áramunk nem volt.

Ha az intensitás váltakozik, úgy egy bizonyos idő alatt indukált összes áramunk

$$\int Jdt = -\frac{1}{aW}\int\frac{dV}{dt}dt = \frac{1}{a}\frac{(V_1 - V_2)}{W},$$

a hol V_1 és V_2 a potentiálokat jelentik a mozgás kezdetén, illetőleg végén. Ha a mágnes igen nagy távolságból jő, akkor

$$\int Jdt = -\frac{\frac{1}{a} V_2}{W}$$

független a mágnes útjától és sebességétől.

A keresett törvényt a következőleg fejezhetjük ki: Az indukáló áramnak összes elektromotoros ereje, melyet valamely mágnesnek helyzetváltozása egy zárt áramvezetővel szemben hoz létre, azzal a változással egyenlő, mely e közben a mágnesnek a vezetőre vonatkozó potentiáljában megy végbe, ha föltételezzük, hogy a vezetőben $\frac{1}{a}$ áram halad át. Itt az elektromotoros erő egysége az, mely az ellenállás egységében a tetszőleges áramegységet hozza létre. Az ellenállás egysége pedig az, melyben az említett áramegység az időegység alatt a melegegységet fejti ki. Ugyanez a törvény megvan NEUMANN-nál i. h. 9. §. csakhogy nála az $\frac{1}{a}$ helyett egy határozatlan E állandó van.

6. Ha valamely mágnes egy vezetőnek és egy e vezető által mágnesezett vasdarabnak hatása alatt mozog, úgy az előbbiek szerint

$$aAJ = aJ^2 W + J\frac{d\varphi}{dt} + J\frac{d\chi}{dt},$$

tehát

$$J = \frac{A - \frac{1}{a}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right)}{W},$$

a hol φ a mágnesnek a vezetőre vonatkozó potentiálja az áramegységnél, χ a mágnesnek a mágnesezett vasdarabra vonatkozó potentiálja az áramegység által fölkeltett mágnesség részére. E szerint a vasdarab jelenléte folytán keletkezett indukált áramnak elektromos ereje

$$-\frac{1}{a}\frac{d\chi}{dt}.$$

Ha az áram az elektromágnesben a mágnességnek n ugyanolyan elosztását létesíti, mint a közeledő mágnesek; akkor a 4. pontban mondottak szerint kell, hogy a mágnesekre vonatkozó potentiálja

$n\chi$, egyenlő legyen a vezető sodronyokra vonatkozó potentiáljával nV-vel, ha V a potentiált jelenti az áram egységénél. Igy $\chi = V$. Ha tehát indukáló áramot létesítünk az által, hogy a vasdarab a mágnesnek elosztása folytán mágnesessé válik, úgy az elektromotoros erő

$$-\frac{1}{a}\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{dV}{dt},$$

és mint az 5. pont alatt találtuk, az összes áram:

$$\int J dt = \frac{\frac{1}{a}(V_1 - V_2)}{W},$$

a hol V_1 és V_2 a mágnesezett vasnak a vezető sodronyokra vonatkozó potentiáljai a mágnesezés előtt és után. — NEUMANN e törvényt az előbbi esettel való analógia utján vezeti le.

7. Ha elektromágnes valamely áram hatása alatt válik mágnesessé, úgy az indukáló áram folytán meleg megy veszendőbe. És pedig ha lágy vasdarabunk van, akkor ugyanaz az indukáló áram nyitás alkalmával ellenkező irányt vesz föl, és az elveszett meleget visszakapjuk. Ha pedig aczéldarabunk van, mely mágnességét megtartja, úgy az illető meleg elveszett marad, és helyette mágneses munkaerőt nyerünk, mely teljes megkötésnél az említett mágnes potentiáljának felével egyenlő, a mint azt a 4. pontban kimutattuk. Egyébiránt az előbbi esetek analógiájából kifolyólag nem éppen valószinűtlen, hogy az elektromotoros erő megfelel összes potentiáljának, mint a mely végeredményre NEUMANN is rájutott; és hogy a mágneses fluidumok mozgásának egy része sebességük folytán mint meleg vész el, mely meleget itt a mágnesekben nyerjük.

8. Mozgassunk egymás ellenében két zárt vezetéket, úgy az áram intensitása mindkettőben megváltozhatik. Ha az áramegységre vonatkoztatott potentiáljuk egymással szemben V, akkor az előbbi eseteknek megfelelőleg és ugyanabból az okokból állania kell a következő egyenletnek

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 = J_1^2 W_1 + J_2^2 W_2 + \frac{1}{a} J_1 J_2 \frac{dV}{dt}.$$

Legyen a W_2 vezetőben az áram intensitása jóval kisebb, mint a W_1 vezetőben, úgy hogy az elektromos indukáló erő, melyet W_2 a W_1-ben indít, az A_1 erővel szemben elenyészik és ha $J_1 = \frac{A_1}{W_1}$ helyettesítést megtehetjük, akkor az előbbi egyenletből a következő értéket kapjuk:

$$J_2 = \frac{A_2 - \frac{1}{a} J_1 \frac{dV}{dt}}{W_2}.$$

E szerint az elektromos indukáló erő azon erö, melyet oly mágnes létesít, melynek elektrodynamos ereje épp akkora, mint az indukáló áram. Ezt a törvényt WEBER W.* kisérletileg beigazolta.

Ellenben, ha az intensitás W_1-ben elenyészőleg csekély a W_2-ben levő intensitáshoz képest, úgy

$$J_1 = \frac{A_1 - \frac{1}{a} J_2 \frac{dV}{dt}}{W_1}.$$

Azaz, bármilyen is a vezetők alakja, ha az áramintensitások egyenlők, a vezetőknek elektromotoros erői is egyenlők.

Ime az összes indukáló erő — mely a vezetőknek bizonyos egymással szemben való mozgása alatt áramot szolgáltat, mely áram maga az indukálás folytán változást nem szenved — itt újból az indukáló vezető potentiáljának változásával egyenlő, vonatkoztatva a másik — $\frac{1}{a}$ által keresztülfolyt vezetőre. NEUMANN a mágnesi és elektrodynamos erők analogiájából, i. h. 10. §., ez alakban mutatja ki a törvényt és kiterjeszti arra az esetre is, a midőn álló vezetőkben az áramok erősödése és gyengülése létesíti az indukálást. WEBER W. kimutatja, hogy az elektrodynamos erőkre vonatkozó föltétele e theorémákkal megegyezik i. h. 147—153. l. Az erők megmaradásának elvéből az eset számára semmiféle határozmányt nem vehetünk ki; mindössze is az indukáló áram gyöngülésének kell bekövetkeznie, melyet az indukált áramnak az indukálóra gyakorolt visszahatása idéz elő; e gyöngülés épp annyi melegvesz-

* Electrodynamische Maasbestimmungen. 71—75. l.

teségnek felel meg, mint a mennyit az indukált áramban nyertünk. Ugyanennek a viszonynak kell fennállania az áramnak önmagára való hatásánál a kezdetbeli gyöngülés és az extracurrens között. Különben itt egyéb következtetést nem vonhatunk, mert az áramok emelkedésének alakját nem ismerjük, s azonkívül az Ohm-féle törvényt közvetlenül nem alkalmazhatjuk, mert az itt említett áramok a vezeték egész terjedelmét egyidejüleg nem áraszthatják el.

Az ismeretes természeti processusok közül, most már csakis a szerves lényeké van hátra. A növényeknél leginkább chemiai jelenségekre találunk, s azonkívül — legalább egyeseknél — valami csekély melegkifejlődés is van. Bennük legkivált hatalmas menynyiségü chemiai feszitő erő halmozódik fel, melyek egyenértékét számukra meleg alakjában szolgáltatja a növényi substantiák elégése. Az egyedüli eleven erő, mely eddigi ismereteink szerint ennek fejében a növények kifejlődése alatt felszivódik, a napfénynek chemiai sugarai. Egyébként azoknak az erőegyenértékeknek, a melyek ezen folyamat alkalmával veszendőbe mennek vagy nyerhetők, közelebbi összehasonlításához még jóformán minden adat hiányzik. Az állatokat illetőleg már néhány közelebbi megállapodásra jutottunk. Ezek ugyanis növények által készített komplikált oxydálódó összetételeket, és oxygent emésztenek meg és azokat részben főképp elégetve, mint szénsavat és vizet, részben egyszerűbb összetételeikre bontva adják ki magokból: e szerint bizonyos mennyiségű chemiai feszitő erőt használnak fel, s annak fejében meleget és mechanikai erőket hoznak létre. De mivel ez utóbbiak munkanagysága a meleg mennyiségével szemben aránylag csekély, úgy az erő megmaradásának kérdése oda redukálódik: vajjon a táplálékul szolgáló anyagok elégése és átalakulása épp annyi melegmennyiséget létesit-e, mint a mennyit az állatok a környezetnek átadnak? E kérdésre Dulong és Despretz kisérletei után legalább is megközelitőleg igen-nel válaszolhatunk.*

---

* E kérdéssel bővebben foglalkoztam a következő munkálatokban: *Encycl. Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften.* Art. «Wärme» és *Fort-*

Végre még meg kell emlitenem Matteucci-nak néhány megjegyzését, melyeket ő az itt végrehajtott tárgyalási móddal szemben tett és melyek a Biblioth. univ. de Genève-ben, Suppl. No. 16. 1847. 15. mai p. 375. találhatók fel. Matteucci abból a tételből indul ki, hogy valamely chemiai folyamat, ha egyuttal elektromosságot, mágnességet és fényt is létesít, nem fog annyi meleget fejleszteni, mint mikor e jelenségek nem következnek be. Ő ezzel szemben azt állítja, a mit a megejtett mérések sorozatával iparkodik bebizonyitani, hogy ha a zincum kénsavban feloldódik, épp annyi meleget hoz létre, tisztán chemiai rokonság útján történő feloldódás mellett, mintha a zincum a platinával lánczot képezett volna; továbbá, hogy valamely elektromos áram, mely egy mágnest kitérít és e kitérésében meg is tart, épp annyi chemiai és hőhatást képes előidézni, mintha e kitérités jelen sem volna. Hogy Matteucci e tényeket ellenvetéseknek tartja, ama nézet tökéletes félreértéséből ered, melyet ő meg akar czáfolni, s ez e viszonyoknak a mi előadásunkkal való összehasonlitásából csakhamar ki is világlik. Azután két kalorimetriai mérést hoz fel: egyik arra a melegre vonatkozik, mely maró-barytnak concentrált és higitott kénsavval való összeköttetése alkalmából fejlődött; a másik arra, melyet különböző hűtőképességű gázokban elhelyezett sodronyokban ugyanegy elektromos áram hoz létre, a midőn az illető tömeg és a sodrony majd izzóvá válnak, majd pedig nem. Ő a kifejlődött melegmennyiséget az első esetben sem találta kisebbnek, mint a másodikban. Ha azonban meggondoljuk, hogy kalorimetriai berendezésünk tökéletlensége el nem tagadható, úgy éppenséggel nem tünhetik fel, hogy a lehűlés különbsége a kisugárzás folytán nem volt észrevehető; ez a különbség abból származhatott, hogy e kisugárzás — a szerint a mint világitó vagy nem világitó természetű — a környezetet alkotó diatherman közegeken át könnyebben vagy nehezebben hatol keresztül. Még hozzá Matteuccinak első kisérletében a barytnak kénsavval való egyesülése nem diatherman ólomedényben

---

schritte der Physik im Jahre 1845, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. 346. l.

történik, melyből a világitó sugarak még ki sem juthatnak. Mindezekből MATTEUCCI módszerének tökéletlenségeit könnyen felismerhetjük.

Azt hiszem, hogy az itt felsoroltakkal bebizonyitottam, hogy a megvitatott törvény a természettudományoknak eddigelé ismert egyetlen tényével sem ellenkezik, sőt azt a tények egész sora a legfeltünőbb módon megerősiti. Törekvésem az volt, hogy a következményeket lehetőleg teljes számban állitsam fel, mely következmények a megvitatott törvénynek és a természeti tünemények eddig ismert törvényeinek combinatiójából erednek, és melyeknek a kisérletek által való megerősitésüket még meg kell várniok. E vizsgálódás czélja, mely egyúttal meg is engedi, hogy benne hypothesises részek fordultak elő, az, — hogy a physikusoknak a lehető teljes egészében kimutassam e törvény elméleti, gyakorlati és heuristikus fontosságát, melynek teljes megértését és megerősitését kell, hogy a legközelebbi jövőben a physika egyik főfeladatának tekintsék.

Pótlások. (1881.)

1. *A 7. laphoz. A bevezetés bölcseleti fejtegetéseire* KANT-nak ismeretelméleti nézetei nagyobb befolyást gyakoroltak, semhogy azt most még helyesnek ismerném el. Csak később lett világossá előttem, hogy az okszerűség elve tényleg nem más, mint valamennyi természettünemény törvényességének föltétele. A törvényt, melyet objectiv hatalomnak ismerünk el, nevezzük mi erőnek. *Ok*, a szó valódi értelmében, a tüneménynek változása mellett is a változatlanul megmaradó és a meglevő; tudniillik az anyag és hatásának törvénye: az erő. A 8. lapon említett lehetetlenség, hogy tudniillik az anyagot és erőt isolálva gondoljuk, egyszerűen abból következik, hogy minden hatás törvénye bizonyos föltételeket követel meg, melyek mellett azután nyilvánulhat. Valamely anyagától mentes erő oly törvényt alkotna, melynél az erő müködésének föltételei hiányoznak.

2. *A 9. laphoz.* A szükségességet, hogy az erőket olyanokra bontsuk fel, melyek pontokra vonatkoznak, a természet tökéletes

elfoghatóságának elvéből következtethetjük oly tömegekre nézve, a melyekre az erők hatnak; a mennyiben a mozgást teljesen nem ismerjük, hacsak minden anyagi pontnak mozgása nem megadott. De nekem úgy tetszik, hogy hasonló szükségesség nem áll fenn oly tömegekre, melyekből az erők kiindulnak. Én ezt a következő dolgozatban már részletesen megbeszéltem. Az I. és II. fejezetben levő fejtegetések csak részben engedhetők meg, ha a ponterőknek a felbonthatóságát kezdettől fogva érvényesnek tekintjük. Hogy a mozgató erők, mint azokat Newton definiálta, valamennyi egyes erőnek a parallelegrammák törvénye szerint szerkesztett eredői, melyek az összes egyenkint meglevő tömegelemekből indulnak ki, — azt csak úgy fogadhatom el természeti törvénynek, mint a melyre tapasztalás utján jutottunk. Egyik tény ezt mondja: A gyorsulás — melyet valamely tömegpont akkor kap, ha több hatás működik közre — azoknak a gyorsulásoknak eredője (geometriai összege), melyeket az egyes okok egyenkint idéztek elő. Természetesen a tapasztalatban előfordul az az eset, hogy két test, pl. két mágnes, melyek egyidejüleg egy harmadikra hatnak, erőt fejt ki, ez az erő nem azoknak az erőknek egyszerű eredője, melyet mindenik test különvéve kifejtene. Ez esetben beérjük azzal a föltevéssel, hogy minden egyes mágnes a másikban egy láthatatlan sulytalan substantiának elrendezését változtatja meg. De a felfoghatóság elvét többé nem ismerhetem el kielégítőnek arra a következtetésre, hogy két vagy több mozgató ok kölcsönös hatása folytán előálló hatást szükségképen az egyesek hatásából vett összeg útján kell feltalálnunk.

A Newton-féle második axiomának e valóságos tartalmát épp úgy, mint a később kimondott elvet, hogy két tömegnek egymásra ható erői szükség szerint meghatározottak, ha a tömegek helyzete pontosan adva van — elhagytuk azokban az elektrodynamikai elméletekben, melyekben az elektromos mennyiségek közt levő erőt azok sebességétől és gyorsulásától teszszük függővé. Az ez irányban tett kisérletek mindeddig még mindig ellenmondásokra vezettek a hatás és visszahatás egyenlőségének, továbbá az energia állandójának mechanikai elveivel szemben, a melyek eddigi tapasztalataink keretén belül estek és kivétel nélkül megbizonyosodtak. Erről különben később az elektrodynamos tárgyalásoknál még fogunk néhány szót szólni. Ha az elektromosságot illetőleg a vezetőkben csak labil egyensuly léteznék, úgy azzal az elektromos problémák megoldásának egyértelmüsége és bizonyossága is veszendőbe menne; és ha valamely erőt az absolut mozgástól teszünk függővé — az az egy tömegnek valamihez, tudniillik tagolatlan üres térhez való megváltozott vonatkozásától, mely valami sohasem lehet megejthető megfigyelésnek tárgya : akkor ez nekem oly föltevésnek tetszik, mint a mely elzár minden kilátást arra nézve, hogy a természettudományi feladatok teljes megoldását elérhessük, pedig ennek szerintem csak akkor szabadna megtörténnie, ha már minden más elméleti lehetőséget kimerítettünk.

3. *A 14. laphoz.* Lipschitz úr figyelmeztetett, hogy az itt közölt és sokszor használt bebizonyítás nem elégséges arra az esetre, hogy az erők a sebességektől és a gyorsulásoktól függjenek. Mert helyettesithetünk így is:

$$X = \frac{dU}{dx} + Q \cdot \frac{dz}{dt} - R \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$Y = \frac{dU}{dy} + R \cdot \frac{dx}{dt} - P \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$Z = \frac{dU}{dz} + P \cdot \frac{dy}{dt} - Q \cdot \frac{dx}{dt},$$

a hol U a koordináták valamely függvénye, P, Q, R pedig a koordinátáknak és differentiálhányadosuknak tetszőleges függvényei, így

$$X \cdot \frac{dx}{dt} + Y \cdot \frac{dy}{dt} + Z \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}[\tfrac{1}{2} mq^2],$$

tehát az eleven erő a koordinátáknak valamely függvénye. Az erőkomponensek értékeihez tartozó P, Q, R tényezőkkel ellátott pótlékok egy eredő erőt képeznek, mely a mozgatott pont eredő sebességére merőleges. Ily erő természetesen megváltoztatja a pálya görbületét, de az eleven erőt nem.

De ha a hatás és visszahatás törvényének érvényességét és a feloldhatóságot ponterőkre megállapitjuk, akkor a szövegben felállított általános tétel érvényes marad. Mert az említett törvény valamely pontpárt illetőleg csak oly erőket enged meg, melyeknek az összekötő egyenes írányában egyenlő intensitásuk és ellenkező irányuk van. Miért is a sebességekre merőleges erők csak abban a pillanatban léphetnek fel, a mikor mind a két sebesség az összekötő egyenesre merőleges.

Kell tehát, hogy a fejezetnek záró tétele a megjegyzésben levő pótló tételt magában foglalja.

4. *A 20. laphoz.* Ez a tétel is tágabb értelmű, mert hiszen a megelőző általános tételeknek amaz esetekre kellett szorítkozniok, a melyeknél a hatás és visszahatás törvénye általános érvényűvé vált. Ha mi ez utóbbit mellőzzük, úgy a Clausius úr által legujabban felállított elektrodynamikai alaptörvény oly esetet tüntet fel, melynél az erők, noha a sebességektől és gyorsulásoktól függnek, a végtelenig mégsem létesíthetnek hajtó erőt.

5. *A 33. laphoz. Az erőmegmaradás törvényének fölfedezéséhez történeti szempontból* itt utólag még meg kell jegyeznem, hogy Mayer R. dolgozatát «Ueber die Kräfte der unbelebten Natur» * 1842-ben hozta nyilvánosságra és értékezését «Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel» 1845-ben Heilbronnban. Már az első dolgozatában kifejezi meggyőződését a meleg és a munka egyenértékűségéről, továbbá kiszámítja a meleg egyenértékét, a Holtzmann által előirt módon és azt, mint szövegében irja, 365 méterkilogrammnak találja. Második dolgozata általános czélját tekintve lényegében véve az enyémmel megegyezik. Én mindkét munkát csak később ismertem meg, de miután megismertem, valahányszor csak az itt megvitatott törvény felállítása nyilvánosan szóba került,** sohasem mulasztottam el Mayer Robert-et első sorban megemlíteni, sőt igényeit a mennyire csak

* Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler und Liebig. XLII. kötet. 233. lap. — Mindkét dolgozatot ujból kinyomatták «Die Mechanik der Wärme» czímű könyvben. Gesammelte Schriften von J. R. Mayer. Stuttgart. Cotta. 1867.

** L. Helmholtz «Populäre wissenschaftliche Vorträge». 1854. II. füzet. 112. lap. — U. o. 1862. 141. lap. — U. o. 1869. 194. lap.

tőlem telt, mindig oltalmamba vettem JOULE-nak barátaival szemben, a kik azt kereken tagadásba venni hajlandók voltak. Egy levelemet, melyet ily értelemben irtam TAIT P. G. úrhoz, «Sketch of Thermodinamics» (Edinburgh, 1868) czímű könyvének előszavában TAIT le is nyomatta. Im itt szövege:

«Megvallom, hogy KIRCHHOFF-nak e téren (Radiation and Absorption) tett fölfedezései nekem úgy tetszenek, mint a legtanulságosabb esetek egyike, a melyek a tudomány történetében előfordultak; legfőképpen azért, mert előtte igen sok más kutató ugyane fölfedezésnek éppen a forduló pontjáig jutott el. KIRCHHOFF elődei e téren körülbelül oly viszonyban vannak hozzá, mint az erő megmaradását illetőleg MAYER ROBERT, COLDING és SÉGNIN vannak JOULEhoz és WILLIAM THOMSON-hoz.»

«A mi MAYER ROBERT-et illeti, nagyon is értem az álláspontot, melyet az említettek vele szemben elfoglaltak; de én meg nem szalaszthatom el ez alkalmat, hogy ki ne mondjam, hogy az én véleményem nem egészen az övéké is. A természettudományok előhaladása attól függ, hogy mennyire tudnak a már ismert tényekből mindig új inductiókat képezni, és azután hogy ez inductiók következményei, a mennyiben még az új tényekre vonatkoznak, a kisérlet segítsége mellett, mennyire hasonlíthatók össze a valósággal. Kétséget nem szenved, hogy e második eljárás nagyon is szükséges. Sőt e második rész igen sokszor mély munkásságot és éleselműséget követel, és az, a ki ezt jól végrehajtja, a legkiválóbb érdemekre számíthat. De a feltalálás dicsősége mégis csak azt illeti meg, a ki az új eszmét kipattantotta; az ezt követő kisérleti vizsgálódás inkább a kivitelnek mechanikai módja. Föltétlenül azt sem követelhetjük, hogy az eszme feltalálója kötelezett legyen a munka második részét is végrehajtani. Hiszen akkor kénytelenek lennénk valamennyi mathematikus-physikus munkáinak legnagyobb részét levetni. Magának W. THOMSON-nak is egész sorozat elméleti munkálata van a CARNOT-féle elv és ennek következményeiről, a nélkül, hogy ő erre vonatkozólag csak egyetlen egy kisérletet is tett volna, és bizony egyikünknek sem jut eszébe, hogy dolgozatának becsét csak valamivel is csökkentsük».

«Mayer Robert nem volt abban a helyzetben, hogy kisérleteket tehessen; őt physikus ismerősei visszautasították (néhány évvel később én is így jártam) s csak nehezen szerezhetett tért magának, a hol első, igen rövidre szabott előadását nyilvánosságra hozhatta. Ön tudni fogja, hogy ő e visszautasítás következtében végre lelki beteg lett. Most nehéz magunkat annak az időnek gondolatkörébe visszahelyezni és kitisztázni, absolut véve mennyire látszott akkor újnak e dolog. Azt hiszem, hogy Joule-nak is sokáig kellett küzdenie, míg fölfedezésének elismerését kinyerhette».

«Noha senki sem fogja tagadni, hogy Joule sokkal többet tett mint Mayer, és hogy ez utóbbinak első értekezésében sok részlet nem világos; mégis úgy vélem, hogy Mayer-t oly embernek kell tekintenünk, a ki függetlenül és önállóan bukkant arra a gondolatra, mely a természettudomány ujabb haladásai között a legelső helyet foglalja el. Érdeméből az mit sem von le, hogy ugyanabban az időben más valaki egy más országban és más hatáskörök közepette ugyanarra a fölfedezésre jutott és azután kivitelét kétségkívül jobban hajtotta végre, mint ő».

A metaphysikai speculatiók hívei ujabb időben megkisérlették mindenütt érvényesiteni, hogy az erő megmaradásának törvénye apriori érvényes, és ezért Mayer-t mint herost üdvözlik a tiszta gondolkodás mezején. A mit ők Mayer működésének csúcspontjáúl tekintenek — tudniillik a metaphysikailag alakított álbizonyítékokat e törvény apriorisztikus szükségességére nézve — az éppen fejtegetései leggyöngébb részének tünik fel minden szigorúan tudományos methodikához szokott természetbúvár előtt, és kétségtelenül ez az ok, a miért Mayer munkálatai a természettudományi körökben oly sokáig ismeretlenek maradtak. Csak miután más oldalról, névszerint Joule úrnak remek munkálatai révén, a meggyőződés e törvény helyességének utat tört volt: fordították az emberek Mayer irataira figyelmüket.

Egyébként ezt a törvényt, mint a valóságos világ jelenségeire vonatkozó valamennyi ismeretünket, inductiv módon találták fel. Hogy perpetuum mobilet nem készithetünk, azaz vég nélkül való hajtó erőt megfelelő felhasználás nélkül nem kaphatunk, — az sok sikertelenűl végrehajtott kisérletből lassankint kifolyó inductió volt.

A franczia akadémia a perpetuum mobilet már régen abba a fogalomkörbe sorozta, melyben a kör négyszögítése is helyet foglal és elhatározta, hogy többé a feladatnak semmiféle állítólagos megoldását nem fogadja el. Ezt talán mégis úgy kell tekintenünk, mint a szakértők között széles körben elterjedt meggyőződésnek kifejezését. Én magam az iskolaidő alatt elég sokszor adtam e meggyőződésnek kifejezést, és hallottam, mily hiányosan fejtegették a mellette felhozott bizonyitékokat. Az állati meleg eredetére vonatkozó kérdés követelte a leggondosabb és legteljesebb tárgyalást mind ama tények közül, melyek e feladatra vonatkoztak. Valahányszor csak e dolognak nekifeküdtem, azt mindannyiszor csak kritikai ténynek tekintettem, nem pedig eredeti fölfedezésnek, melynek prioritásáért vitatkozni kelljen. Azután néhányszor nagyon is elcsodálkoztam azon az ellenszegülésen, melylyel a szakértők köreiben találkoztam. Munkálatomnak fölvételét Poggendorff Annaleseiben megtagadták, és a berlini akadémia tagjai közül egyedül Jacobi C. G., a mathematikus volt az, a ki mellettem szót emelt. Dicsőségre és külső sikerre abban az időben új eszmékkel nem lehetett számítani; sőt inkább az ellenkező dolgokra. Hogy én magam ez irat felfogásánál is engemet meg nem illető prioritásra semmi módon nem törekedtem, mint azt metaphysikai irányú ellenfeleim reám fogni iparkodnak, e tekintetből, azt hiszem, teljesen elégséges lesz azt a körülményt felhoznom, hogy én minden kutatót, a ki ebben az irányban dolgozott, a mennyire őt ismertem, munkámban megemlítettem. És a már általam idézett munkák, névleg a Jouleéi, eléggé kimutatták, hogy már akkor semmiféle prioritásra igényt nem támaszthatok, a mennyire általában véve az általános elvet illetőleg ilyesvalami szóba is kerülhetett volna.

Ha irodalmi ismereteim abban az időben 1847-ben még hiányosak voltak, úgy kérem azt annak tulajdonítani, hogy az előttünk fekvő értekezést Potsdam városában dolgoztam ki. Itt pedig irodalmi segédeszközeim mindössze is az ottani gymnasium könyvtárára szorítkoztak. Még akkor a berlini physikai társaságnak «Fortschritte der Physik» czímű folyóirata és más segédeszközök hiányoztak, melyek most csakugyan könnyűvé tették, hogy magunkat a physikai irodalomban tájékoztassuk.

6. *A 35. laphoz. Valamely test potentiáljának fogalmát, egy elektromos töltésnél önmagára vonatkoztatva* itt más jelentőségűnek vettem, mint azt később a tudományos irodalomban rendesen használták. Az a körülmény, hogy csak kevés és nehezen hozzáférhető eszközeim voltak, az általam ismert irodalomban nem találtam egyetlen elődre, a ki e fogalmat használta volna; és azért szolgált képzésénél irányadóul két különböző töltés potentiáljának analógiája (a szövegben *V)*. Ha most azt képzeljük, hogy a vezetők congruensek és a megfelelő felületrészek egyenlő erősen megtöltöttek, úgy mindkettőnek V potentiálja képezhető. Most tegyük fel, hogy mindkét testet congruens helyzetbe vittük át; akkor V az lesz, a mit én itt W-vel jelöltem meg. Ebből kifolyólag két-két e és ε elektromos részecskének minden combinatiója kétszer jő számításba. Az így képezett W most már nem a munka értéke, mint azt a szövegben megállapítottuk, hanem az $\frac{1}{2}W$ (35. lap.*) Későbbi munkámban más szerzők czélravezetőbb szokásaihoz alkalmazkodtam és $\frac{1}{2}W$-vel a testnek önmagára vonatkozó potentiálját jelöltem.

* Az illető mondat az eredetinek végén mint kiigazítás volt beiktatva.

TARTALOM.

	Lap
Bevezetés	6
I. Az eleven erő megmaradásának elve	10
II. Az erő megmaradásának elve	15
III. Az elv alkalmazása a mechanikai tantételeknél	21
IV. A hő erőegyenértéke	24
V. Az elektromos jelenségek erőegyenértéke	33
VI. A mágnesség és elektromágnesség erőegyenértéke	51
Pótlások	60

Tudomásul. Dr. Helmholtz H. értekezése az erö megmaradásáról stb. füzet alakjában jelent meg 1847-ben Reimer G.-nél Berlinben. Ujból lenyomatták a «Wissenschaftliche Abhandlungen von Helmholtz» czímü könyvben, Lipcse 1882. Barth I. A. kiadása I. k. 12—75 lap. A szerző ehhez a kiadáshoz irta megjegyzéseit, a pótlásokat, a melyekre az 1-től 6-ig terjedő számok a szövegben utalnak.

A FÖLDI MÁGNESES ERŐ INTENZITÁSA ABSZOLUT EGYSÉGEKBEN.

IRTA

GAUSS KÁROLY FRIGYES.

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

FORDITOTTA

TANGL KÁROLY.

BUDAPEST.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT.

1897.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

A földi mágneses erő teljes meghatározására adott helyen három elem szükséges: a deklináczió, vagyis a hatás síkja és a meridiánsík közötti szög, az inklináczió, azaz az erő irányának hajlása a vízszinteshez; végre az erősség, intenzitás. A deklináczió — sokféle alkalmazásainál fogva a hajózásban és geodéziában a legfontosabb elem — kezdettől fogva foglalkoztatta a csillagászokat és fizikusokat, kik azonban egy század óta az inklinándzióra is kiterjesztették figyelmüket. A harmadikat azonban, az intenzitást, mely bizonyára a tudománynak ép olyan méltó tárgya, egészen a legújabb időkig elhanyagolták. Humboldt-ot illeti az érdem, hogy először fordította figyelmét eme tárgyra is és utazásai közben a földi mágneses erő intenzitására vonatkozó sok észlelést gyűjtött, melyekből kitünt, hogy eme erősség a mágneses egyenlítőtől kiindulva, a sark felé folytonosan nagyobbodik. Igen sok fizikus követte ama kiváló természetbuvár nyomdokait, és már eddig is annyi észlelési anyagot hordtak össze, hogy újabban Hansteen, a ki a földi mágnesség ismerete körül oly sok érdemet szerzett, általános izodinámikus térképet adhatott ki.

Mindezen vizsgálatoknál a következő módszer nyer alkalmazást: észleljük az időtartamot, mely alatt egy ugyanazon mágnestű a különböző helyeken ugyanannyi számú lengést végez, vagy a lengések számát ugyanazon időközben. Az erősséget az ugyanazon időközben végzett lengések számának négyzetével arányosnak veszszük. Ily módon összehasonlitjuk egymással a teljes intenzitásokat, ha a tömegközéppontjában felfüggesztett inklináczió-tűt a mágneses meridiánsíkra merőlegesen álló vízszintes tengely körül lengetünk; a vízszintes összetevőket hasonlitjuk össze, ha vízszintes mágnestűt függélyes tengely körül lengetünk. Az észlelés utóbbi módja nagyobb pontosságra vezet és a belőle nyert eredményeket könnyen vonatkozásba hozhatjuk a teljes intenzitással, ha meghatároztuk az inklinácziót.

Ezen eljárás jogosultsága nyilván azon feltevésen alapszik, hogy az alkalmazott mágnestűben a szabad mágnesség elosztása az egyes kisérletek alatt változatlan maradt: ha ugyanis időközben a tű mágneses ereje gyengülne, akkor később e miatt lassabban lengene és az észlelő, a ki ezen változásról mit sem tud, a földi mágneses erő intenzitásának egy későbbi helyen a kelleténél kisebb értéket tulajdonitana. Ha a kisérletek nem terjeszkednek ki nagy időközökre és jól keményitett és gondosan mágnesesitett aczéltűket alkalmazunk, a mágneses erő jelentékenyebb gyöngülésétől nem kell épen tartanunk; a bizonytalanság azon kívül kisebbíthető, ha több mágnest használunk az összehasonlításra; végre még jobban megbizhatunk az előbbi feltevésben, hogy ha a kiinduló helyre visszatérve, a mágnestű lengés idejében változást nem észlelünk. Azonban bármily óvóintézkedéseket tegyünk is, nem kerülhetjük el a tű mágneses erejének lassú gyöngülését; a miért ilyen egyezés hosszú időköz után alig várható. Épen ezért messze fekvő helyeken az intenzitások összehasonlításában nem érhetjük el a kivánatos pontosságot és biztosságot.

Különben a módszer ezen hátránya kevésbé zavar, a míg egyidejű intenzitások összehasonlításáról van szó, vagy pedig olyanokról, melyek nem nagyon távoleső időpontoknak felelnek meg. Minthogy azonban a tapasztalat azt mutatta, hogy úgy a deklináczió, mint az inklináczió egy ugyanazon helyen folyton változik, még pedig évek multán igen jelentékenyen, nem szenved kétséget, hogy a földi mágnesség intenzitása is hasonló, úgyszólván szekuláris változásoknak van alávetve. Nyilvánvaló dolog, hogy a nevezett módszer hasznavehetetlen, mihelyt ezen kérdésről van szó. Mégis a természettudományok haladásának szempontjából igen kivánatos, hogy ezen rendkívül fontos kérdés is teljes megoldást nyerjen. Nem történhetik ez mindaddig, míg ama tisztán összehasonlító módszert olyannal nem helyettesíthetjük, mely független a mágnestűk esetleges egyenlőtlenségeitől és a földi mágneses intenzitást változatlan egységekre és független mértékre vezeti vissza.

Nem nehéz megadni azon elméleti alapelveket, melyeken ilyen régen kivánatos módszernek alapulnia kell.

A lengések száma adott időközben függ egyrészt a földi mágneses intenzitástól, másrészt a mágnestű alkatától, nevezetesen a benne foglalt elemek szabad mágnességének sztatikai momentumától és a tű tehetetlenségi momentumától. Minthogy ezen tehetetlenségi momentum minden nehézség nélkül meghatározható, a lengések észlelése nyilván a földi mágneses intenzitás és a tű mágnessége sztatikai momentumának szorzatát szolgáltatja; ezen két mennyiség azonban szét nem választható, míg másnemű észlelésekhez nem folyamodunk, melyek ama mennyiségeket más kapcsolatban nyujtják. Ezen czélt elérhetjük, ha még egy második mágnestűt veszünk segítségül, és azt úgy a földi mágnesség, valamint az első tű behatásának vetjük alá, hogy a két erő viszonyát meghatározhassuk. Igaz, mindkét hatás függ majd a szabad mágnesség elosztásától, a második tűben azonban az utóbbi hatást megszabja még az első tű alkata, a középpontok távolsága, a középpontokat összekötő egyenes fekvése a két tű mágneses tengelyéhez, végre a mágneses vonzás és taszítás törvénye. Már Mayer Tóbiás sejtette, hogy eme törvény a gravitáczió törvényével annyiban egyezik, hogy a távolság négyzetével fogy: Coulomb és Hansteen kisérletei ezen sejtelemnek igen nagy valószinűséget adtak, a legújabb kisérletek pedig minden kétségen kívül helyezik. Megjegyzendő azonban, hogy ezen törvény csak a szabad mágnesség egyes elemeire vonatkozik: a mágneses test összhatása egészen más törvényt követ: nagy távolságokra, a mint az előbb említett törvényből levezethető, igen közel a távolság harmadik hatványával fordítva arányos, úgy hogy a mágnestű hatása, szorozva a távolság harmadik hatványával, a távolság növekedtével, ha különben minden változatlan marad, meghatározott határértékhez közeledik, mely a földi mágneses erő hatásával egynemű és vele összehasonlítható, ha a távolságokat számokban fejezzük ki, egy bizonyos hosszat egységül választva.

A kisérletek czélszerű berendezése és kezelése lehetővé teszi ezen viszony határértékének meghatározását. Mivel pedig ez csak az első tű szabad mágnességének sztatikai momentumát tartalmazza, megkapjuk már most ezen momentum viszonyát a földi mágneses intenzitáshoz; ez összevetve eme mennyiségek előbb meghatározott szorzatával, arra szolgál, hogy ezen sztatikai momentumot elimináljuk és ily módon a földi mágneses intenzitás értékéhez vezessen. Ha a földi mágnességnek és a második tűnek hatását az első tűre kisérletileg akarjuk megvizsgálni, két út áll rendelkezésünkre: a második tűt vagy mozgási, vagy egyensúlyi állapotában észlelhetjük. Az első út végeredményben, ezen tű lengéseinek észlelésére vezet, mialatt a földi mágneses erő és az első tű együttesen hatnak reá. Utóbbit alkalmas távolságban úgy kell elhelyeznünk, hogy tengelye a lengő tű középpontján átmenő meridiánban feküdjék; azáltal a tű lengéseit vagy gyorsabban, vagy lassabban végzi, a szerint, a mint különnemű vagy egynemű polusok állanak szemben. A földi mágneses erő viszonyát az első tű hatásához megkapjuk, ha vagy az első tű két állásához tartozó lengésidőket vagy ama lengésidőket hasonlítjuk össze, melyek az első tű egyik állásának és a földi mágnesség egyedüli hatásának (az első tű eltávolítása után) megfelel. A második utat követve, az első tűt úgy helyezzük el, hogy az erő iránya, melyet a második szabadon felfüggesztett tű helyén gyakorol, a mágneses meridiánnal bizonyos szögletet (pld. derékszögletet) zárjon be: ezáltal a második tűt kitéríti a mágneses meridiánból; a kitérés nagyságából levezethetjük a földi mágneses erő és az első tű hatásának viszonyát.

Az első út különben lényegében azonos azzal, melyet Poisson már néhány évvel ezelőtt javaslatba hozott. Néhány fizikus ezen eljárás szerint kisérleteket végzett; kisérleteik azonban, a mennyiben előttem ismeretes, vagy teljesen sikertelenek maradtak, vagy legfeljebb igen durva közelítő értéket adtak.

A tulajdonképeni nehézség abban áll, hogy az első tűnek mérsékelt távolságokból észlelt hatásából oly határértéket kell levezetnünk, mely úgyszólván végtelen nagy távolságra vonatkozik és hogy az erre szükséges eliminácziókat a legkisebb észlelési hibák is annál inkább zavarják, sőt teljesen hasznavehetetlenekké teszik, minél több olyan ismeretlent kell eliminálnunk, melyek a tű különös alkatától függenek: az ismeretlenek számát pedig csak úgy tehetjük elég kicsinynyé, ha a behatás a tűk hosszához képest elég nagy távolságokból történik; akkor azonban a hatás igen kicsiny. Arra pedig, hogy ilyen kis hatások mérhetők legyenek, az eddig alkalmazásban levő praktikus segédeszközök nem elegendők.

Láttam, hogy mindenekelőtt új segédeszközök kipuhatolásán kell fáradoznom, hogy úgy a lengésidőt, valamint a tű irányát az eddiginél sokkal nagyobb pontossággal észlelhessem és mérhessem.

Az ezen czélból több hónapon át folytatott kisérletezés, melynek folyamán Weber sokféleképp támogatott, annyira kielégítő eredményre vezetett, hogy a várakozásnak nem csak hogy megfelelt, hanem ezt felül is multa, úgy hogy ha a kisérletek pontosságát a csillagászati észlelések élességeig akarjuk fokozni, semmi más kivánni való sem marad hátra, mint közeli vasaktól és légvonattól jól védett helyiség. Két eszköz áll rendelkezésünkre, melyek e kivánalmaknak megfelelnek. Mindkettő kitűnik egyszerűsége és pontossága által. Ezeknek leirását ugyan más alkalomra kell fentartanom; az itteni csillagdában eddig végzett kisérletek eredményeit azonban a jelen dolgozatban nyujtom át a fizikusoknak.

1.

A mágneses jelenségek magyarázatára két folyadékot veszünk fel: az egyiket északinak, a másikat délinek nevezzük. Felveszszük, hogy az egyik folyadék eleme a másikat vonzza, hogy ellenben ugyanazon folyadék két eleme egymást taszitja és hogy mindkét hatás a távolság négyzetével forditva, arányosan változik. Alább kitűnik majd, hogy eme törvény helyességét észleléseink teljes mértékben igazolják.

Ezen folyadékok magukban nem fordulnak elő, hanem csak olyan testek anyagi részeihez kötve, melyek a mágnességet felveszik. Ezeknek hatása abban nyilvánul, hogy a testeket mozgásba hozzák, vagy megakadályozzák, illetve megváltoztatják azon mozgásokat, melyeket más erők, pld. a nehézség az illető testekre hatva, létrehoznának.

Ezért a mágneses folyadék adott mennyiségének hatása más adott mennyiségre — egyneműre vagy különneműre — adott távolságból összehasonlítható valamely adott mozgató erővel, azaz adott gyorsító erőnek hatásával adott tömegre; mivel pedig a mágneses folyadékot csak hatásaiból ismerhetjük fel, épen ezeknek kell azok mértékeül szolgálniok.

Hogy azonban ezen mértéket meghatározott fogalmakra vezethessük vissza, mindenekelőtt három mennyiségfajra kell megállapítanunk az egységeket, nevezetesen a távolságok, a súlyos tömegek és a gyorsító erők egységét. A harmadik gyanánt a nehézséget vehetjük az észlelő helyen: ha azonban ez nem felelne meg, akkor az idő egységének kell még hozzájárulnia, és akkor azon gyorsító erő = 1, mely az időegységben a test sebességét mozgásának irányában az egységgel változtatja.

Ennek alapján az északi folyadéknak azon mennyisége lesz egyenlő az egységgel, melynek taszító hatása a vele egyenlő és a távolság egységében elhelyezett folyadékmennyiségre az egységnyi mozgató erővel egyenlő, azaz a egységnyi gyorsító erő hatásával a tömegegységre; ugyanez áll a déli folyadékmennyiség egységére: ezen meghatározásnál úgy a ható, mint a hatásnak alávetett folyadékot nyilván fizikai pontokba tömörültnek kell gondolnunk. Azon kívül fel kell vennünk, hogy különnemű folyadékoknak adott mennyiségének vonzása adott távolságból egyenlő a megfelelően egyenlő mennyiségű egynemű folyadékok taszításával. Ezért az északi folyadék m mennyiségének hatása m' mennyiségű, vele egynemű folyadékra r távolságból kifejezhető $\frac{mm'}{rr}$-rel, vagy egyértékű a $\frac{mm'}{rr}$ nagyságú mozgató erővel, mely az első folyadéktól a másodikhoz vont egyenes irányban működik és ezen képlet nyilván általános érvényességű, ha a déli folyadékmennyiséget negativnak tekintjük, a mit a következőkben mindig tenni fogunk és megállapitjuk, hogy a $\frac{mm'}{rr}$ erő, ha negativ, vonzást képviseljen.

Ha tehát valamely fizikai pontban egyenlő mennyiségű északi és déli folyadék van, akkor ez semmiféle hatást sem fejt ki, ha pedig nem egyenlő mennyiségben van jelen, akkor csak az egyiknek fölöslege jő tekintetbe, melyet szabad mágnességnek (északi vagy déli) fogunk nevezni.

2.

Ezen alapvető feltevésekhez egy másikat kell még csatolnunk, melyet a tapasztalat mindig megerősít, azt t. i., hogy minden testben, mely mágneses folyadékot tartalmaz, mindkét nemű folyadékból egyenlő mennyiség van jelen. Sőt a tapasztalat arra tanít, hogy ezen feltevést a testek azon legkisebb részeire is ki kell terjesztenünk, melyeket érzékünkkel még észrevehetünk. Mivel azonban az előbbi fejezet végén mondottak alapján, hatás csak akkor jöhet létre, ha a folyadékok valamiképen szét vannak választva, szükségképen fel kell tennünk, hogy oly kis közök választják azokat szét, melyek méréseinknek alá nem vethetők.

A mágneses testet tehát mint számtalan oly részecskének összességét kell felfognunk, melyek mindegyike bizonyos mennyiségű északi folyadékot, ugyanannyi délit tartalmaz és pedig úgy, hogy vagy egyenletesen vannak eloszolva (rejtett mágnesség) vagy kisebb, vagy nagyobb mértékben el vannak választva (szabad mágnesség), a szétválasztás azonban sohasem terjedhet annyira, hogy a folyadék az egyik részecskéből a másikba átfolyjék. Az egészen közömbös, vajjon a nagyobb fokú szétválasztást úgy képzeljük, hogy nagyobb folyadékmennyiség szabadul fel, vagy hogy nagyobb köz választja el azokat; nyilvánvaló azonban, hogy a szétválasztás nagysága mellett annak irányát is tekintetbe kell vennünk, mert a szerint, a mint utóbbi a test különböző részecskéiben egyezik vagy nem, a hatás is a testen kívül eső pontokban nagyobb vagy kisebb lesz.

Bárminő is legyen azonban a szabad mágnesség eloszlása a test belsejében, mindig helyettesíthetjük azt, egy általános tétel értelmében, más eloszlással tisztán a test felületén, mely kifelé ugyanazon hatást fejti ki, mint amaz, úgy hogy bármely a testen kívül fekvő mágneses folyadékelemre a test belsejében tényleg létező eloszlás ugyanazon hatást létesíti, mint a felületén gondolt eloszlás. Ugyanezt tehetjük két testtel is, melyek a belsejükben beállott eloszlás értelmében hatnak egymásra, úgy hogy mindegyiknél a tényleges belső eloszlás helyébe a gondolt felületi eloszlás léphet. Ily módon végre helyesen értelmezhetjük azt a szokásos szólásmódot, mely pld. a mágnestű egyik végének tisztán északi, másikának tisztán déli mágnességet tulajdonít, mert hisz ezen kifejezésmód az előbb kimondott alaptörvénynyel, melyet más jelenségek feltétlenül megkövetelnek, össze nem egyeztethető.

Megelégedhetünk itt ezen hozzávetőleges megjegyzéssel; a tantétel részleteibe, melyek jelen czélunkra nem szükségesek, más helyen fogunk bocsátkozni.

3.

Valamely test mágneses állapota a szabad mágnesség eloszlalásának viszonyától függ az egyes részecskékben. Ezen állapot változékonyságában igen nagy különbséget veszünk észre az egyes mágnesezhető testek között. Egyeseknél, pld. a lágy vasnál ezen állapot a legkisebb erő hatása alatt azonnal változik és ha ezen erő megszünik, rögtön visszaáll az előbbi állapot; másoknál ellenben, különösen a keményített aczélnál, az erőnek bizonyos nagyságot kell elérnie, hogy a mágneses állapotban észrevehető változást hozzon létre és ha ez megszünt, akkor a test vagy megmarad az új állapotában, vagy legalább nem veszi fel teljesen eredeti állapotát. Az előbbi testekben a mágneses részecskék úgy rendezkednek, hogy a mágneses erők, melyek egyrészt egymásra való kölcsönös hatásukból, másrészt külső okokból származnak, tökéletes egyensúlyban vannak, vagy állapotuk a most leirttól észrevehetőleg alig különbözik. Utóbbi testeknél ellenben a mágneses állapot tartós lehet a nélkül, hogy ama erők tökéletes egyensúlyt tartanának, hacsak nagy külső erők nem működnek. Ámbár ezen jelenség oka nem ismeretes, mégis úgy képzelhetjük, mintha az utóbbi testek részecskéi a mágneses folyadékok mozgása elé a surlódáshoz hasonló akadályt gördítenének, ellenállást, mely a lágy vasban vagy egyáltalában nincs meg, vagy legalább csak igen kis mértékben.

Az elméleti vizsgálatnál a két eset teljesen különböző tárgyalást igényel; jelen értekezésben azonban csak a második osztályba tartozó testekről leszen szó: a megbeszélendő kisérleteknél az állapot változatlansága az egyes testekben alapfeltevésként szerepel. és azért kisérletezés közben óvakodnunk kell attól, hogy oly testeket közelítsünk, melyek ezen állapotot megváltoztathatnák.

A változásra mégis van egy ok, melynek a második osztályba tartozó testek is alá vannak vetve, t. i. a hő. A tapasztalat minden kétségen kívül mutatja, hogy a test mágneses állapota a hőmérséklettel változik, oly módon azonban, hogy hacsak nem melegitjük a testet túlságosan, az előbbi hőmérsékletével az előbbi mágneses állapota is visszatér. Ezen összefüggést alkalmas kisérletekkel kell meghatározni és ha az egy kisérlethez tartozó észleléseket különböző hőmérsékleteknél végeztük, akkor azokat mindenekelőtt ugyanazon hőmérsékletre kell visszavezetnünk.

4.

Függetlenül a mágneses erőktől, melyeket a tapasztalás szerint eléggé közeli testek egymásra gyakorolnak, más erő is működik a mágneses folyadékokra, melyet, miután a földön mindenütt fellép, magának a földgömbnek tulajdonitunk és földi mágnességnek nevezünk. Ezen erő kétféleképen jelentkezik: a második osztályba tartozó testek, mihelyt mágnesesek, meghatározott irányba helyezkednek, ha tömegközéppontjukban támasztjuk meg őket; az első osztályú testekben a mágneses folyadékokat ezen erő maga szétválasztja, a mit igen szembetünővé tehetünk, ha az illető testnek alkalmas alakot és helyzetet adunk. Mindkét jelenséget megmagyarázhatjuk azon felfogás alapján, hogy azon erő az északi folyadékot bármely helyen bizonyos irányba tereli, a délit pedig ugyanolyan mértékben, az ellenkező irányba. Mindig az előbbi irányt értjük, ha a földi mágnesség irányáról van szó; ezen irányt meghatározza hajlása a vízszintes síkhoz, és azon függélyes sík elhajlása a meridián-síktól, melyben az erő hat: azon függélyes sík a mágneses meridiánsík. A földi mágnesség intenzitása azon erővel mérendő, melyet az egységnyi mágneses folyadékra gyakorol. Ezen erő nemcsak hogy különböző a föld különböző helyein, hanem egy és ugyanazon helyen is változik, még pedig úgy az évszázadok és évek, mint évszakok és órák folyamán. Az irányra vonatkozó változását már régen ismerték, az intenzitásra vonatkozólag ezen változást azonban csak egy napon belül tudták észlelni, miután hosszabb időközökre is alkalmas eszköz hiányzott. Ezen a bajon a jövőben azzal segíthetünk, hogy az intenzitást abszolut egységekben mérjük.

5.

Hogy a földi mágnesség hatását a másodosztályú testekre (a következőkben mindig ilyenekről lesz szó) számíthassuk, képzeljük a testet végtelen kis részekre felbontva: legyen dm a szabad mágnesség eleme egy ilyen részben, melynek koordinátáit három egymásra merőleges, a testtel szilárd kapcsolatban lévő síkra x y z-vel jelöljük; a déli folyadék elemeit negativoknak vesszük. Akkor mindenekelőtt világos, hogy az egész testre (sőt annak minden mérhető részére) kiterjesztett integral $\int dm = 0$. Legyen továbbá $\int xdm = X$, $\int ydm = Y$, $\int zdm = Z$; ezen mennyiségeket a szabad mágnesség momentumainak nevezzük, vonatkoztatva a három alapsíkra vagy a reájuk merőleges tengelyekre. Miután $\int (x—a)\, dm = X$, hacsak a tetszőleges állandó érték, közvetlenül világos, hogy a momentum, bizonyos tengelyre vonatkoztatva, csakis ennek irányától függ, nem pedig a kezdetétől. Ha a koordinata-rendszer kezdetén át egy negyedik tengelyt vonunk, mely az előbbiekkel A, B, C szögeket képez, akkor a dm elem momentuma ezen tengelyre $= (x \cos A + y \cos B + z \cos C)\, dm$, és a szabad mágnesség momentuma az egész testben

$$= X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = V.$$

Ha

$$\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = M$$

és

$$X = M \cos \alpha \qquad Y = M \cos \beta \qquad Z = M \cos \gamma,$$

és egy ötödik tengelyt húzunk, mely az első hárommal α, β, γ szögleteket, a negyedikkel pedig ω szögletet zár be, akkor, mivel a megállapitások alapján $\cos \omega = \cos A \cos \alpha + \cos B \cos \beta + \cos C \cos \gamma$, $V = M \cos \omega$. Ezen ötödik tengelyt egyszerűen a test mágneses tengelyének nevezzük és irányára nézve megállapítjuk, hogy a $\sqrt{XX + YY + ZZ}$ gyök pozitiv értékéhez tartozik. Ha a negyedik tengely ezen mágneses tengelylyel egybeesik, akkor a momentum $V = M$ lesz, mely nyilván valamennyi momentum között a legnagyobb: tetszőleges más tengelyre vonatkozólag megkapjuk a momentumot, ha ama legnagyobb momentumot (melyet, ha kétértelműség ki van zárva, egyszerűen a mágnesség momentumának nevezhetünk) megszorozzuk azon szög cosinusával, melyet ezen tengely a mágneses tengelylyel bezár. A mágnestengelyre merőleges tengelyre vonatkozó momentum $= 0$, ellenben negativ minden oly tengelyre, mely a mágnesessel tompa szöget képez.

A mágneses tengely tehát nem egy meghatározott egyenes, miután bármely ponton fektethetjük keresztül, hanem csak egy meghatározott irány, más szóval, végtelen sok egymással párhuzamos mágneses tengely létezik. Ha ezek közül egyet tetszőlegesen választunk és meghatározott hosszat tulajdonitunk neki, akkor a végeit polusoknak nevezzük, az egyik a déli, a másik az északi, a tengely a délitől az északi felé irányul.

6.[1])

Ha a mágneses folyadék egyes részeire állandó nagyságú és irányú erő hat, akkor a testre gyakorolt összhatást könnyen levezetjük a sztatikai alapelvekből, miután az itt tekintetbe jövő testeknél ama részek folyékony természetüket mintegy elvesztették, és az anyagi testtel egy szilárd egészet képeznek. Egy tetszőleges mágneses részecskére, dm-re működjék a Pdm nagyságú mozgató erő a D irányban (a déli folyadék részecskéire vonatkozólag a negativ előjel magában is az ellenkező irányt jelzi); A és B legyen a mágneses tengely irányában fekvő két pontja a testnek, távolságuk $= r$ és pedig pozitiv előjellel, ha a mágneses tengely A-tól B felé van irányítva: akkor könnyen belátható, hogy ha ezen erőkhöz két új erő lép, melyek mindegyike $= \frac{PM}{r}$, melyek egyike A-ra hat a D irányban, másika B-re az ellentett irányban, akkor mindeme erők között egyensúly áll fenn. Azért az előbbi erők egyenértékűek két $\frac{PM}{r}$ értékű erővel, melyek egyike B-re hat a D irányban, másika A-ra az ellenkező irányban és nyilvánvaló, hogy a két erőt nem lehet egygyel helyettesíteni.

Ha a testben levő mágneses folyadékra a P erőn kivül még egy másik hasonló P' erő működik D' irányban, akkor az utóbbit megint helyettesítjük más két erővel, mely vagy ugyanazon A és B pontokra, vagy más két, A' és B' pontra hat, hacsak $A'B'$ szintén mágneses tengely és pedig ezen erőknek, ha $A'B' = r'$, $\frac{P'M}{r'}$ nagyságúaknak kell lenniök és B'-re D' irányban, A'-ra pedig az ellenkező irányban kell működniök. Ugyanez áll a többi esetleg működő erőre.

A földi mágneses erőnek azon téren belül, melyet a kisérletnek alávetett test elfoglal, bizonyára mindenütt állandó, ámbátor az időben változó intenzitást és irányt tulajdoníthatunk; tehát alkalmazható reá az, a mit az imént mondottunk. Azonban előnyös azt kezdettől fogva két erőre bontani egy T vízszintes és egy T'' függélyes összetevőre; utóbbi a mi vidékünkön lefelé irányul. Miután pedig azon esetben, ha az utóbbit az A' és B' pontokra működő két erővel helyettesítjük, az A' pontot, valamint az $A'B'$ távolságot szabadon választjuk, az A' pontnak a tömegközéppontot fogjuk választani és r'-et egyenlővé teszszük $\frac{T'M}{p}$-vel, $r' = \frac{T'M}{p}$, ha p a test súlyát, azaz a mozgató erőt, a tömegére működő nehézséget jelenti. Ez által a T' erő hatását két erőre bontjuk fel: az egyik $= p$, mely A-ra felfelé hat, a másik ugyanilyen nagyságú, mely B'-re lefelé működik, mivel pedig az előbbit maga a nehézség nyilván megsemmisíti, a függélyes összetevő hatását egyszerűen a tömegközéppontnak A'-ból B'-be való áthelyezésére vezetjük vissza. Különben világos, hogy olyan helyeken, hol a földi mágneses erő a vertikálissal hegyes szögletet képez, más szóval, hol a függélyes összetevő az északi folyadékot felfelé mozgatja, a tömegközéppontot a mágnestengely mentén a déli polus felé fogjuk elhelyezni.

A viszonyok ilyetén felfogásánál közvetlenül kitünik, hogy bárminő kisérleteket is végezzünk a mágnestűvel egy egyetlen mágneses állapotában, az inklináczió ezekből nem vezethető le, hanem hogy a tömegközéppont fekvésének máshonnan már ismeretesnek kell lennie. Ezen helyzetet meg szokták határozni, mielőtt a tűt mágnesezik: ezen eljárás azonban nem nyujt elég biztonságot, mert az aczéltű már elkészitésekor többnyire felvesz némi mágnességet. Az inklináczió meghatározásához tehát szükséges, hogy a mágneses állapot alkalmas megváltoztatásával a tömegközéppontnak más áthelyezését hozzuk létre. Hogy ez az előbbitől lehetőleg különbözzék, szükséges lesz a polusokat megforditanunk, a mi által az áthelyezés kétszeres lesz. Különben a tömegközéppontnak áthelyezése még olyan tűkben is, melyek formája a legalkalmasabb és melyek mágnességgel telítve vannak, nem mehet bizonyos határon túl, mely a mi vidékünkön körülbelül 0·4 mm (egyszerű áthelyezés), oly helyeken pedig, hol a függélyes erő a legnagyobb, 0·6 mm.-en alul marad; ebből látható egyszersmind, mily nagyfokú mechanikai finomságot kell a tűtől követelnünk, mely az inklináczió meghatározására szolgál.

7.[2])

Ha a mágneses test egy valamely C pontját szilárdnak veszszük, akkor az egyensúlynak szükséges és elegendő feltétele, hogy a C ponton, a tömegközépponton és a mágneses tengelyen átfektetett sík a mágneses meridiánnal egybeessék és hogy azonfelül a forgató nyomatékok, melylyel a földi mágneses erő és a nehézség ama síkot a C pont körül forgatni törekesznek, egymást megsemmisítsék; utóbbi feltétel egyértelmű a következővel: ha T a földi mágneses erő vízszintes összetevője és i a mágneses tengely hajlása a vízszinteshez, akkor TM sini-nek egyenlőnek kell lennie a test súlyából és az eltolt tömegközéppontnak, B'-nek a C-n átmenő függélyestől mért távolságából képezett szorzattal: eme távolság nyilván a déli vagy északi oldalon fekszik, a szerint, a mint i a vízszintes fölött vagy az alatt van; ha $i = 0$ B' magába a függélyesbe esik. Ha a testet ama függélyes körül úgy forgattuk, hogy a mágneses tengelyen átfektetett vertikális sík azimutja, azaz a mágneses meridiánnak északi darabjával bezárt szöglet $= u$ (pozitiv keletre vagy nyugatra), akkor a földi mágnesség a testre erőt gyakorol, mely az u szögletet kisebbíteni törekszik és melynek momentuma $= TM$ cosi sinu, és a test ezen tengely körül lengéseket fog végezni, melynek tartamát ismeretes módon kiszámíthatjuk. Ugyanis ha k a testnek a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi momentumát jelenti (azaz a tömegelemekből és a forgástengelytől mért távolságuk négyzetéből képezett szorzatok összegét) és π mint rendesen az egységnyi sugarú kör fél kerületét, akkor egy végtelen kis lengés tartama

$$= \pi \sqrt{\frac{K}{TM \cos i}}$$

ha t. i. T és M-ben a gyorsító erő egységéül azon gyorsító erőt veszszük, mely az időegységben a sebesség egységét létesiti: véges kilengések visszavezetése végtelen kis kilengésekre épen úgy számítható, mint az inga lengésénél. Ha az észlelések alapján egy végtelen kis lengésnek ideje $= t$, akkor a következő egyenletet nyerjük $TM = \frac{\pi\pi K}{tt\cos i}$, és ha azonkívül a testet úgy akasztjuk fel, hogy a mágneses tengely vízszintes (ezentúl mindig feltételezzük), akkor

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt}.$$

Ha a gyorsító erő egységéül inkább a nehézséget akarnók használni, akkor a fenti értéket még $\pi\pi l$-lel kell osztanunk, ha l a másodpercznyi inga hossza, úgy hogy általánosságban volna $TM = \frac{K}{ttl\cos i}$ és a mi esetünkben $TM = \frac{K}{ttl}$.[3]

8.[4]

Ha ilynemű kisérleteket oly mágnestűkkel végezünk, melyek függélyes fonalon lógnak, akkor a csavarás visszahatása finomabb méréseknél nem lesz elhanyagolható. Ilyen fonálban két átmérőt fogunk megkülönböztetni: az egyik D az alsó végnél, a hol a tű meg van fogva, a másik E a felső végnél, hol a fonál meg van erősítve; D legyen párhuzamos a tű mágneses tengelyével, azonkívül legyenek D és E párhuzamosak, ha a fonál nincs megcsavarva. Felveszszük, hogy E a mágneses meridiántól v szöglettel, a mágneses tengely pedig avagy D u szöglettel tér el, akkor tapasztalás szerint a csavaró erő legalább közelítőleg arányos lesz $v-u$-val, azért mondhatjuk, hogy a momentum, melylyel ezen erő az u szögletet v-vel egyenlővé törekszik tenni, $=(v-u)\theta$. Mivel pedig a földi mágneses erő momentuma, melylyel az u szögletet kisebbíteni akarja, $=TM\sin u$, az egyensúly feltételét a következő egyenletbe foglalhatjuk:

$$(v-u)\theta = TM\sin u,$$

melynek annál több reális megoldása lesz, minél kisebb θ a TM szorzathoz képest: a mig azonban u kicsiny értékeiről van csak szó, azon egyenlet helyébe bátran a következőt tehetjük: $(v-u)\theta = TMu$ vagy $\frac{v}{u} = \frac{TM}{\theta} + 1$. A mi készülékünkben a fonál felső vége mozgatható karhoz van erősítve, ezen mutató van, melynek állása fokokra osztott körön megjelölhető. Ha tehát a kollimáczió-hiba (azaz azon osztályrész, mely a $v=0$ értéknek felel meg) nem is ismeretes elegendő pontossággal, a mutató mégis megadja két v érték különbségét: a készülék egy másik része ugyanígy a legnagyobb pontossággal megadja az u értékek közti különbséget, melyek az egyensúlyi helyzetnek felelnek meg és világos, hogy a $\frac{TM}{\theta}+1$ értékét megkapjuk, ha két v érték különbségét a hozzátartozó u értékek különbségével osztjuk. Ha az erre szükséges kisérletek hosszabb időt igényelnek is és a legnagyobb pontosságra törekszünk, akkor a deklináczio napi változására is tekintettel kell lennünk; ezt könnyen tehetjük, ha egy második eszközt is megfigyelünk, melyben a fonál felső vége egy helyben marad: alig szükséges arra figyelmeztetni, hogy a két eszköz oly távol legyen egymástól, hogy egymást érezhetően ne zavarják.

Hogy ilynemű észlelések mekkora finomságot engednek meg, a naplóból vett következő példa mutatja: 1832 szeptember 22-én, beleértve a kollimáczio-hibát, a következő u deklinácziókat és v szögleteket észleltük.

Kisérlet	Idő	Első tű		Második tű
		u	v	
I.	d. e. 9 h. 33′	$+0°\,4'\,19{,}5''$	300°	$+0°\,2'\,12{,}1''$
II.	9 57	$-0\;\;0\;\;19{,}6'$	240°	$+0\;\;1\;\;37{,}7$
III.	10 16	$-0\;\;4\;\;40{,}5$	180°	$0\;\;1\;\;18{,}8$

Tehát az első tű deklinácziói, vonatkoztatva az első észlelés állására:

I.	$u = 0°\;\;4'\;\;19{,}5''$		$v = 300°$
II.	$+0\;\;\;0\;\;\;14{,}8$		240
III.	$-0\;\;\;3\;\;\;47{,}2$		180.

Ebből a $\frac{TM}{\theta}$ viszony értéke

I. és II.-ből	881,7
II. és III.-ból	891,5
I. és III.-ból	886,6.

A mágneses deklinaczio napi változásait a csavarás $\frac{n}{n+1}$ arányában kisebbíti, ha $\frac{TM}{\theta} = n$, mely változás elhanyagolható, ha oly kicsiny csavarású fonalat használunk, mint az előbbi példa mutatja. A mi a lengésidőt illeti (végtelen kis kilengésekre), a dynamikai elvekből könnyen kimutatható, hogy azt a torzio $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ arányában kisebbíti. Ez tulajdonképen arra az esetre vonatkozik, a mikor $v=0$. Az előbbi képletek azonban általános érvényességűek, ha felvesszük, hogy $\frac{TM\cos u_0}{\theta} = n$, hol u_0 u-nak azon értékét jelenti, mely az egyensúlynak felel meg: a különbség azonban bizonyára észre nem vehető.

9.[5]

A θ együttható értéke lényegesen függ a fonal hosszától, vastagságától és anyagától, azonkívül fémfonalaknál valamennyire a hőmérséklettől, selyemfonalaknál a levegő nedvességétől: azonkívül, úgy látszik, hogy azoknál egyáltalán független a megterheléstől (talán ezeknél is ha egyszerüek). Másképráll azonban a dolog többszörös selyemfonalaknál, a minőket nehezebb tűk felfüggesztésére használnunk kell: ezeknél θ növekszik a ráakasztott súlylyal, sokkal kisebb marad azonban mint az ugyanolyan hosszúságú és hordóképességű fémfonalaknál. Így pl. az előbbi fejezetben tárgyalthoz teljesen hasonló módszer (de más fonállal és más tűvel) az $n = 597,4$ értéket szolgáltatta, mikor a fonál a tűt rendes felszerelésével hordta; az összes megterhelés akkor 496,2 g. volt; ellenben a $n=424,8$ értéket adta, ha a ráakasztott súly 710,8 g.-t tett ki, vagy az első esetben $\theta = 0{,}0016740$ *TM*, a másodikban $\theta = 0{,}0023542$ *TM*. A fonál, melynek hossza 800 mm, 32 egyszerű fonálból van összerakva, melyek mindegyike 30 gr-ot biztosan elbir és úgy vannak elrendezve, hogy egyformán feszüljenek. Különben valószinű, hogy θ értéke egy állandó és egy a megterheléssel változó részből áll és hogy az állandó rész egyenlő az egyes fonalakhoz tartozó θ-k összegével. Ezen feltevés alapján (melyet a kisérletek eddigelé nem igazolnak eléggé) az előbbi példában θ állandó részére 0,0001012 *TM*-et kapunk, egy fonálra tehát $\theta = 0{,}00000316$ *TM*. Felhasználva *TM*-nek a későbbiekben meghatározandó értékét, kiszámithatjuk ezen feltevésből, hogy ily fonálnak a visszahatása, mely a sugárral egyenlő ívvel csavarodott meg, egy milligramm nehézségével egyenlő, mely $^1/_{17}$ mm-nyi karon működik.

10.

Ha lengő test szabályos alakú és homogen tömegű egyszerü tű, akkor a tehetetlenségi momentum az ismert módon könnyen kiszámitható. Ha pl. a test derékszögű parallelepiped, melynek oldalai a, b, c, sűrűsége d, tömege q, tehát $=abcd$, akkor a középpontján átmenő, a c oldallal párhuzamos tengelyre viszonyitott tehetetlenségi momentum $= \frac{1}{12}(aa+bb)\,q$: és mivel ilyen alakú mágnestűknél a mágneses tengelylyel párhuzamos oldal, t. i. a rendesen sokkal hosszabb mint b, durvább kisérletekre elegendő a $K = \frac{1}{12}aaq$ érték. Finomabb kisérleteknél azonban, ha mindjárt egyszerű tűt használunk is, alig engedhető meg ez a kényelmes feltevés, hogy az alak teljesen szabályos és tömege teljesen homogen, és a mi kisérleteinknél, hol nem is egyszerű tű, hanem komplikált felszereléssel ellátott tű leng, egyáltalán lehetetlen a feladatot ilyen számitással megoldani és így más eljárást kellett megállapitani K értékének meghatározására.

A tűhöz fából készült keresztrúd volt erősitve, melyen két súly lógott; ezek igen finom csúcsokkal a rúd A és B pontjaira nehezedtek: ezen pontok vízszintes egyenesben feküdtek a felfüggesztési tengelyen átmenő függélyes síkban és a tengelytől egyenlő távolságra voltak. Ha a két súly mindegyikének tömege $=p$, és az AB távolsága $=2r$, akkor ezen készülék hozzácsatolása a K tehetetlenségi momentumot $C+2prr$-rel nagyobbítja, hol C a rúdnak a felfüggesztési tengelyre vonatkoztatott momentumának és a súlyoknak a csúcsokon és tömegközépponton átmenő függélyes tengelyre vonatkoztatott momentumának összege. Ha tehát észleljük a meg nem terhelt és a két különböző, t. i. $r=r'$ és $r=r''$ távolságban megterhelt tű lengéseit és azt találjuk, hogy a lengésidők $=t, t', t''$ (visszavezetve végtelen kis kilengésekre és megtisztítva a torzio hatásától), akkor a három

$$\begin{aligned} TMtt &= \pi\pi K \\ TMt't' &= \pi\pi(K+C+2pr'r') \\ TMt''t'' &= \pi\pi(K+C+2pr''r'') \end{aligned}$$

egyenletből a három ismeretlen ú. m. TM, K és C meghatározható. Még nagyobb pontosságot érhetünk el, ha r több értékére, t. i. $r=r'$, r'', r''' s i. t. észleljük a hozzátartozó lengésidőket t', t'', t''' . . . s i. t. és a legkisebb négyzetek módszerével a két ismeretlent x és y-t úgy határozzuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} t' &= \sqrt{\frac{r'r'+y}{x}} \\ t'' &= \sqrt{\frac{r''r''+y}{x}} \\ t''' &= \sqrt{\frac{r'''r'''+y}{x}} \quad \text{s i. t.} \end{aligned}$$

egyenletek lehető pontosan ki legyenek elégítve. Ily módon ugyanis kapjuk

$$\begin{aligned} TM &= 2\pi\pi px \\ K+C &= 2py. \end{aligned}$$

Ezen módszerről a következőket jegyezzük meg:

I. Ha nem használunk nagyon sima tűt, elég ha arra a farudat egyszerűen ráfektetjük. Ha azonban a felület igen sima, úgy hogy a surlódás a farúd elcsuszását meg nem akadályozza, a farudat az eszköz többi részéhez szilárdabban kell hozzákapcsolni, hogy aztán az egész készülék mint egy szilárd test mozogjon. Mindkét esetben azonban gondoskodni kell arról, hogy az A és B pontok elegendő pontossággal vízszintes egyenesben feküdjenek.

II. Mivel az ilynemű kisérletek összesége néhány órát vesz igénybe, a földi mágnesség változásait ezen időtartam alatt nem szabad elhanyagolni, legalább ha a legnagyobb pontosságot akarjuk elérni. Mielőtt tehát az eliminacziot elvégeznők, a megfigyelt időket T egy állandó értékére, pl. az első kisérletnek megfelelő középértékre kell visszavezetni. Ezen czélból egyidejűleg egy másik tűt is meg kell figyelni (mint a 8. fejezetben); hogy ha ebből egy lengés ideje a kisérletek közepe táján u, ill. u', u'', u''' s i. t., akkor a számításban az észlelt $t't''t'''$ s i. t. helyett az $\frac{u}{u'}t'$, $\frac{u}{u''}t''$, $\frac{u}{u'''}t'''$ s i. t. használandó.

III. Hasonló észrevétel áll M változására nézve, mely a kisérlet folyamán esetleg bekövetkezett hőmérsékletváltozásokból származik. Világos azonban, hogy az imént leírt visszavezetés magában véve megadja ezen javítást is, ha a két tű ugyanazon hőmérsékletváltozásoknak volt alávetve és ennek behatása alatt egyformán változik.

IV. Ha csak TM értékének meghatározásáról van szó, az első kisérlet nyilván felesleges. Előnyös azonban a megterhelt tűn kívül a meg nem terhelt tűvel is megtenni a kisérletet, hogy megkapjuk K értékét; utóbbi oly kisérletek alapját képezheti, melyeket máskor ugyanazon tűvel végezünk majd, mert hisz ezen érték nyilván változatlan, még akkor is, ha időközben T és M változtak.

11.

Hogy a módszer jobban megérthető legyen, nagyszámú alkalmazásaiból egy példát csatolunk ide. Az 1832 szept. 11-én végzett kisérletek a következő táblázatot szolgáltatták.

Kisérlet	Egyidejü lengések		
		Első tű	Második tű
	megterhelés	egy lengés	egy lengés
I.	$r = 180$ mm.	24,63956″	17,32191″
II.	$r = 130$	20,77576	17,32051
III.	$r = 80$	17,66798	17,31653
IV.	$r = 30$	15,80310	17,30529
V.	megterhelés nélk.	15,22990	17,31107

Az időt oly órán észleltük, mely naponkint 14,24″-t (középidő) késett, a súlyok mindegyike 103,2572 gr. volt; az r távolságok mm.-ekben mikroszkopikus pontossággal vannak lemérve; egy lengés tartama, mely legalább 100 lengésből van meghatározva (az ötödik kisérletben az első tű egy lengésének ideje 677 lengésből) már is végtelen kis lengésre van visszavezetve: különben is ezen javitás elenyésző a kilengések kicsiny volta miatt,* melyek a mi eszközünkön alkalmazhatók a nélkül, hogy a pontosság szenvedne. Ezen lengésidőket TM-nek az ötödik kisérlethez tartozó középértékére fogjuk visszavezetni, alkalmazva az előbbi fejezet II. utasításait; azután pedig csavarás nélküli fonálra s pedig oly módon, hogy szorozzuk őket $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$-nel, hol n az első négy kisérletnél $=424,8$, az ötödiknél $=597,4$ (l. 9. fejezet); végre visszavezetjük majd középidőre, szorozván mindegyiket $\frac{86400}{86385,76}$-tal. Ily módon kapjuk:

I.	$24,65717'' = t'$	$r' = 180$ mm.
II.	$20,79228'' = t''$	$r'' = 130$ «
III.	$17,68610'' = t'''$	$r''' = 80$ «
IV.	$15,82958'' = t''''$	$r'''' = 30$ «
V.	$15,24515'' = t$	megterhelés nélkül.

---

* Így pl. az első kisérlet elején a kilengés 0°37′26″ volt, a végén 0°28′34″; az ötödik elején 1°10′21″, 177 lengés után 0°45′35″, 677 után 0°6′44″.

Ha az idő, távolság és tömeg egységéül a másodperczet, a millimetert és a milligrammot választjuk, úgy hogy $p=103257,2$, az első és negyedik kisérletből

$$TM=179641070\,; \quad K+C=4374976000$$

és azután az ötödik kisérletből

$$K=4230282000 \quad \text{és} \quad C=144694000.$$

Ha azonban az összes kisérleteket tekintetbe akarjuk venni, a legkisebb négyzetek módszerét a következő módon fogjuk legkényelmesebben alkalmazni. Az x és y ismeretlenek azon közelítő értékéből indulunk ki, mely az első és negyedik kisérletből adódik és a még hozzá csatolandó javítást ξ és η-val jelölve irjuk:

$$x=88,13646+\xi$$
$$y=21184,85+\eta.$$

Ebből ismert módon $t't''t'''t''''$-re a következő számított értékeket kapjuk:

$$t'\ \ =24,65717-0,13988\,\xi+0,00023008\,\eta$$
$$t''\ =20,78731-0,11793\,\xi+0,00027291\,\eta$$
$$t'''=17,69121-0,10036\,\xi+0,00032067\,\eta$$
$$t''''=15,82958-0,08980\,\xi+0,00035835\,\eta\,;$$ [6]

ezeket összehasonlítva az észlelt értékekkel és alkalmazva a legkisebb négyzetek módszerét, a következő eredményt kapjuk:

$$\xi=-0,03230 \quad \eta=-12,38$$
$$x=\ 88,10416 \quad y=\ 21172,47.$$

Ebből végre

$$TM=179575250, \quad K+C=4372419000$$

és hozzávéve az első kisérletet

$$K=4228732400, \quad C=143686000.$$

A következő összehasonlító táblázat a javított x és y-nal számított lengésidőket és az észlelt lengésidőket tünteti fel.

Kisérlet	Számitott idő	Észlelt idő	Külömbség
I.	24,65884″	24,65717″	+ 0,00167
II.	20,78774	20,79228	— 0,00454
III.	17,69046	17,68610	+ 0,00436
IV.	15,82805	15,82958	— 0,00153

Az egyszerű másodpercznyi inga hossza Göttingában 994,126 mm.; tehát a nehézség, az előbbi számításoknak alapjául szolgáló erőegységekben =9811,63; ha tehát inkább magát a nehézséget választjuk gyorsító erőegységül, akkor $TM = 18302,29$: ezen szám a milligrammok számát adja, melyek nyomása a nehézség behatása alatt egy milliméternyi karon azon erővel egyértékű, melylyel a földmágnesség ama tűt függélyes tengely körül forgatni igyekszik.

12.

Meghatároztuk a földi mágneses erő vízszintes összetevőjének T-nek és a tű mágneses momentumának szorzatát; áttérünk most vizsgálatunk második részére, az $\frac{M}{T}$ viszony meghatározására. Ezt tehetjük, ha az első tűnek egy másik tűre kifejtett hatását összehasonlítjuk a földi mágnesség hatásával ugyanarra; tehetjük ezt pedig, a mint ezt már a bevezetésben kifejtettük, a tűnek vagy mozgási vagy egyensúlyi állapotában; mindkét eljárást sokszor kipróbáltuk; a mennyiben azonban utóbbi sok tekintetben előnyösebb, e helyen csak ennek vizsgálatába bocsátkozunk, annál inkább, mert az előbbi is hasonló módon és minden nehézség nélkül tárgyalható.

13.

Ha valamely mozogható testre tetszőleges erők hatnak, az egyensúlynak feltételeit a virtualis elmozdulások elvével könnyen egy egyetlen képletbe foglalhatjuk: minden egyes erőt szorozzuk a támadó pontnak az erő irányába vett végtelen kis elmozdulásával, ezen szorzatok összegének olyannak kell lennie, hogy semmiféle virtualis azaz a feltételekkel megegyező elmozdulásra se vehessen fel pozitiv értéket, úgy, hogy ha a virtualis elmozdulások mind az ellenkező irányban is lehetségesek, azon összeg, melyet $d\Omega$-val jelölünk majd, minden virtualis elmozdulásra $=0$. A mozgó test a mi esetünkben a mágnestű, mely egyik G pontjában csavarható és felül szilárd fonalon lóg. Ezen fonál csak azt akadályozza meg, hogy a G pont távolsága a szilárd végtől a fonal hosszánál nagyobb lehessen, úgy hogy ezen esetben is, mint a térben teljesen szabad rendszer esetében a test helyzete a térben hat változótól, az egyensúlya pedig hat feltételtől függ. Minthogy azonban a jelen esetben csak az $\frac{M}{T}$ viszony meghatározására szoritkozunk, elég azon virtualis mozgást tekintetbe venni, mely a G-n átmenő függélyes tengely körüli forgásból áll; ezen tengelyt nyilván szilárdnak tekinthetjük és csakis a mágneses tengelyen átmenő függélyes sík és a mágneses meridiánsík közötti szögre kell figyelmünket forditanunk. Ezen szöget a mágneses meridián északi részétől keletre fogjuk számitani, jelöljük pedig u-val.

14.

A mozgó mágnestű térfogatát végtelen kis elemekre gondoljuk feldarabolva; egy tetszőleges elemnek koordinatái legyenek x, y, z, e pedig a benne foglalt elemi szabad mágnesség. A koordináták kezdőpontját a tű belsejében fekvő tetszőleges h pontba helyezzük a G-n átmenő függélyes egyenesen; az x és y tengely legyen vízszintes, amaz a mágneses meridiánban északra, emez keletre irányítva; a z koordinátát felfelé számítjuk. Akkor a földi mágnesség hatása az e elemre a $d\Omega$ összegben a $Tedx$ tagot szolgáltatja.

A második szilárd tűt hasonlóképen bontsuk fel végtelen kicsiny elemekre és X, Y, Z legyenek valamely elemnek koordinátái, E a megfelelő szabad mágnesség mennyisége; legyen végre $r = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}$. Ezen megállapitások mellett az E elemnek hatása e-re a $d\Omega$ összeghez az $\frac{eEdr}{r^n}$ tagot szolgáltatja, ha felvesszük, hogy az az r távolság n-edik hatványával fordítva arányos. Ha N-nel jelöljük u azon értékét, mely a sodratlan fonálnak felel meg, akkor a fonal torziojának momentumát $\theta(N-u)$-val fejezhetjük ki: ezen erőt úgy foghatjuk fel, mintha a fonálnak G-n átmenő valamely vízszintes átmérő két végére $\frac{\theta(N-u)}{D}$ nagyságú tangencziális erő működnék, hol D ezen átmérő és ebből könnyen belátható, hogy ennek a révén a $\theta(N-u)\,du$ tag jut a $d\Omega$ összegbe.

A tű részeinek súlya nyilván semmit sem szolgáltat a $d\Omega$-hoz, mert hisz u az egyedüli változó: irhatjuk tehát

$$d\Omega = \Sigma Tedx + \Sigma \frac{eEdr}{r^n} + \theta(N-u)\,du;$$

az első összegezés az összes e elemekre, a második az egyes e és E-kből képezhető összes csoportokra vonatkozik.

Ebből világos, hogy a stabilis egyensúly feltétele az, hogy

$$\Omega = \Sigma Tex - \Sigma \frac{eE}{(n-1)\,r^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\theta(N-u)^2$$

maximum legyen.

15.

Czélszerű kisérleteinket úgy berendezni, hogy mindkét tű mágneses tengelye vízszintes és hogy a két tű közel egy magasságban legyen: azért további számításainkat ezen feltevésekre alapítjuk.

Az első tű pontjainak koordinátáit a tűben szilárd tengelyekre vonatkoztatjuk majd, melyek szintén a h pontban találkoznak és pedig feküdjék az első tengely a mágneses tengelyben, a második vízszintesen az elsőtől jobbra, a harmadik függélyesen felfelé; az e elem koordinátái ezen tengelyrendszerben legyenek a, b, c. Legyenek hasonlóképen A, B, C az E elem koordinátái a második tűben felvett hasonló szilárd tengelyekre vonatkoztatva, melyek a H pontban metszik egymást: ezen pontot a tű közepéhez közel és a h ponttal egy magasságban választjuk.

A H pont helyzete legkényelmesebben a h ponttól számitott távolsággal és ezen összekötő egyenes irányával volna meghatározható, ha csak egy kisérletről volna szó: mivel azonban a mi czélunkra mindig több kisérlet szükséges, melyek a H pont különböző helyzetére vonatkoznak és ezek ugyan mind egy egyenesben feküsznek, mely azonban nem megy át szükségképen a h ponton, azért jobb a jelzést kezdettől fogva úgy megállapitani, hogy az ilynemű kisérletek rendszere egy egyetlen ismeretlentől függjön. Azért a H pontot az ugyanazon vizszintes síkban a h-hoz közel fekvő h' pontra vonatkoztatjuk, melynek koordinátái legyenek α, β, 0; legyen továbbá a $h'H$ távolság $=R$, a $h'H$ egyenes és a mágneses meridián közötti szög pedig ψ. Ha még a második tű mágneses tengelye és a mágneses meridián közötti szöget U-val jelöljük, akkor lesz:

$$\begin{aligned}
x &= a\cos u - b\sin u\\
y &= a\sin u + b\cos u\\
z &= c\\
X &= \alpha + R\cos\psi + A\cos U - B\sin U\\
Y &= \beta + R\sin\psi + A\sin U + B\cos U\\
Z &= C.
\end{aligned}$$

Ily módon előkészitettünk mindent, a mi az Ω összeg és a $\frac{d\Omega}{du}$ viszony kifejtéséhez szükséges.

16.

Mindenek előtt látható, hogy

$$\Sigma Tex = T\cos u\Sigma ae - T\sin u\Sigma be = mT\cos u,$$

ha az első tű szabad mágnességének momentumát m-mel jelöljük, mert hisz $\Sigma be=0$: $\frac{d\Omega}{du}$ azon része, mely Ω első tagjából származik $= -mT\sin u$.

Ha rövidség kedvéért:

$$k = \alpha\cos\psi + \beta\sin\psi + A\cos(\psi - U) + B\sin(\psi - U) -$$
$$- a\cos(\psi - u) - b\sin(\psi - u)$$
$$l = [\alpha\sin\psi - \beta\cos\psi + A\sin(\psi - U) - B\cos(\psi - U) -$$
$$- a\sin(\psi - u) - b\cos(\psi - u)]^2 + (C - c)^2,$$

akkor

$$rr = (R + k)^2 + l.$$

Mivel hasznavehető kisérleteknél R-nek sokkal nagyobbnak kell lennie, mint a két tű bármelyikének méretei, az $\frac{1}{r^{n-1}}$ mennyiség a következő gyorsan összetartó sorba fejthető:

$$R^{-(n-1)} - (n-1)kR^{-n} + \left(\frac{nn-n}{2}kk - \frac{n-1}{2}l\right)R^{-(n+1)} -$$
$$- \left(\frac{1}{6}(n^3 - n)k^3 - \frac{1}{2}(nn-1)\right)R^{-(n+2)} + \text{ s i. t.},$$

melynek törvényét könnyen megadhatnók, ha megérné a fáradságot. Felhasználva k és l értékeit, a $\Sigma\frac{eE}{r^{n-1}}$ összeg egyes tagjai ilyen alakú tényezőt fognak tartalmazni:

$$\Sigma eEa^{\lambda}b^{\mu}c^{\nu}A^{\lambda'}B^{\mu'}C^{\nu'};$$

ez egyenlő a $\Sigma ea^{\lambda}b^{\mu}c^{\nu}$ és $\Sigma EA^{\lambda'}B^{\mu'}C^{\nu'}$ tényezők szorzatával, melyek, az első illetve a második tű mágneses állapotától függenek. Utóbbira vonatkozólag csak annyit mondhatunk, hogy

$$\Sigma e = 0, \quad \Sigma ea = m, \quad \Sigma eb = 0, \quad \Sigma ec = 0,$$
$$\Sigma E = 0, \quad \Sigma EA = M, \quad \Sigma EB = 0, \quad \Sigma EC = 0,$$

hol M-mel a második tű szabad mágnességének momentumát jelöljük. Abban a különös esetben, ha az első tű (mozgótű) alakja és a mágnesség eloszlása a hosszirányban szimmetrikus, úgy hogy mindig található két oly megfelelő elem, melyekre a és e ellentett, b és c egyenlő értékűek, akkor $\lambda + \mu + \nu$ páros értékére $\Sigma ea^{\lambda}b^{\mu}c^{\nu} = 0$, ha csak a középpont a h ponttal egybeesik; hasonló dolog áll a második tűre, ha annak alakja és mágneses eloszlása szimmetrikus a H pontra vonatkozólag. Így tehát általánosságban a $\Sigma \frac{eE}{r^{n-1}}$ összegben az $R^{-(n-1)}$ és R^{-n} hatványok együtthatói eltünnek; ebben a különös esetben, ha mindkét tű alakja és mágnesezése szimmetrikus és ugyanakkor az elsőnek középpontja a h és h' pontokkal és a másodiknak középpontja H-val egybeesnek, eltűnnek az $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$, $R^{-(n+6)}$ hatványok együtthatói is; valahányszor ezen feltételek közelítőleg teljesülnek, ezen együtthatók legalább igen kicsinyekké válnak. Az Ω második tagjának nevezetesen $-\Sigma \frac{eE}{(n-1)r^{(n-1)}}$ kifejtéséből származó főtag

$$=-\tfrac{1}{2}R^{-(n+1)}(n\Sigma eEkk-\Sigma eEl)$$
$$=mMR^{-(n+1)}(n\cos(\psi-U)\cos(\psi-u)-\sin(\psi-U)\sin(\psi-u)).$$

Ebből következik, hogy $\frac{d\Omega}{du}$ azon részét, mely a második tű hatásának felel meg, a következő sor fejezi ki:

$$fR^{-(n+1)}+f'R^{-(n+2)}+f''R^{-(n+3)}+ \text{ s i. t.}$$

hol az együtthatók a ψ, u, U szögek cosinusának és sinusának és az α, β mennyiségek racziónális függvényei, azonkívül tartalmaznak mennyiségeket, melyek a tűk mágneses állapotától függnek; különösen pedig:

$$f=mM(n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u)).$$

A következő $f'f''$ s i. t. együtthatók kifejtése felesleges; elég lesz megjegyeznünk, hogy

1. tökéletes szimmetria esetében az imént említett f', f''', s i. t. együtthatók elenyésznek;

2. hogy ha a többi mennyiségek változatlanok és ψ két derékszöggel nagyobbodik (vagy a mi ugyanaz, ha az R távolságot ugyanazon egyenesnek visszafelé meghosszabbított részén a h' pont másik oldalán vesszük), az $ff''f''''$ s i. t. együtthatók nem változnak, az f', f''', f^{V} s i. t., ellenben előjelüket változtatják, úgy hogy sorunk a következő alakot ölti:

$$fR^{-(n+1)}-f'R^{-(n+2)}+f''R^{-(n+3)}- \text{ s i. t.};$$

igen egyszerűen következik ez abból, hogy ψ-t az említett módon változtatván k-ból $-k$ lesz, míg l változatlan marad.

17.[7]

Annak a feltétele tehát, hogy a mozgó tű az erők összhatása alatt függélyes tengely körül ne forogjon el, a következő egyenletbe foglalható:

$$0=-mT\sin u+fR^{-(n+1)}+f'R^{-(n+2)}+f''R^{-(n+3)}+$$
$$+ \text{ s i. t. } -\theta(u-N).$$

Mivel pedig könnyen elérhető, hogy N értéke ha nem is zérus, de legalább igen kicsiny legyen és mivel u is a szóban forgó kisérleteknél szűk határok között marad, $\theta(u-N)$ helyébe számba jövő hiba nélkül $\theta\sin(u-N)$-t tehetünk, annál is inkább, mert $\frac{\theta}{mT}$ igen kicsiny. Legyen u^0 u-nak azon értéke, mely az első tű egyensúlyi helyzetének felel meg, ha a második tűt eltávolítjuk, azaz legyen

$$mT\sin u^0+\theta\sin(u^0-N)=0;$$

innen könnyen adódik

$$mT\sin u+\theta\sin(u-N)=(mT\cos u^0+\theta\cos(u^0-N))\sin(u-u^0)^7$$

hol az első tényező helyébe bátran $mT+\theta$ tehető. Első egyenletünk tehát lesz:

$$(mT+\theta)\sin(u-u^0)=fR^{-(n+1)}+f'R^{-(n+2)}+f''R^{-(n+3)}+ \text{ s i. t.}$$

Ha csak az $fR^{-(n+1)}$ tagot tartjuk meg, a megoldás rögtön felírható:

$$\operatorname{tg}(u-u^0)=$$
$$=\frac{mM(n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u^0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u^0))R^{-(n+1)}}{mT+\theta+mM(n\cos(\psi-U)\cos(\psi-u^0)-\sin(\psi-U)\sin(\psi-u^0))R^{-(n+1)}}=$$
$$=FR^{-(n+1)}.$$

Ha pedig a hátralévő tagokat is tekintetbe akarjuk venni, akkor világos, hogy $\operatorname{tg}(u-u^0)$ a következő alakú sorba fejthető:

$$\operatorname{tg}(u-u_0)=FR^{-(n+1)}+F'R^{-(n+2)}+F''R^{-(n+3)}+ \text{ s i. t.}$$

Könnyen meggyőződhetünk, hogy az F, F', F'' s i. t. együtthatók az $R^{-(2n+1)}$ együtthatójáig bezárólag

$$\frac{f}{mT+\theta}, \text{ ill. } \frac{f'}{mT+\theta}, \text{ ill. } \frac{f''}{mT+\theta}, \text{ s i. t.}$$

-ból származnak, ha bennök u helyébe u^0-t irunk; a következő tagtól fogva azonban új részek járulnak hozzá, melyeket azonban a mi czélunkból nem kell továbbra tekintetbe vennünk. Különben $u-u^0$ nyilván hasonló alakú sorba fejthető, mely $\operatorname{tg}(u-u_0)$ sorával az $R^{-(3n+2)}$ tagig egyezik.[8]

18.

Világos már mostan, hogy ha a második tűt ugyanazon egyenesnek különböző pontjaiba helyezzük, úgy hogy ψ és U megtartják értéküket, míg R az egyedüli változó mennyiség és észleljük az $u-u^0$ szögeket, azaz az első tű eltérítéseit azon egyensúlyi helyzetből, melyet az a második tű hatásától menten mutat, akkor abból az $F'F''F'''$ s i. t. együtthatók közül kiküszöböléssel meghatározható annyi, a mennyi szükséges; ily módon a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{M}{T}=\left(1+\frac{\theta}{TM}\right)\frac{F}{n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u^0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u^0)},$$

melyben $\frac{\theta}{TM}$ értéke ugyanolyan eljárással nyerhető, mint azt a 8. fejezetben leirtuk. A kényelmes kivitel szempontjából azonban jó lesz a következőket megjegyeznünk:

I. u és u^0 összehasonlitása helyett előnyösebb két-két ellentett kitéritést hasonlitani össze, a mit a második tű megforgatásával létesithetünk, úgy hogy R és ψ változatlanok maradnak, míg U két derékszöggel növekszik. Ha u azon értékeit, melyek ezen két helyzethez tartoznak u' és u''-tel jelöljük, akkor teljes szimmetria esetében $u'=-u''$ volna, ha még azonfelül $u^0=0$. Fölösleges azonban ezen feltételek betartására tulságos gondot forditani, mert világos, hogy u' és u'' hasonló sorokba fejthetők, melyben az első tagok pontosan ellentett értékűek; hasonlóképen $\frac{1}{2}(u'-u'')$ és $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(u'-u'')$ oly sorba fejthetők, melyben az első tag együtthatója pontosan $=F$.

II. Még előnyösebb, mindenkor négy-négy kisérletet egybefoglalni, miután ψ-t is két derékszöggel változtattuk vagy az R távolságot a másik oldalon vettük. Ha az utóbbi két kisérlethez az u''' és u'''' értékek tartoznak, akkor az $\frac{1}{2}(u'''-u'''')$ különbség hasonló sorral fejezhető ki, melynek első tagjának együtthatója szintén $=F$. Megjegyzendő még, hogy ha n páratlan szám volna $u'-u^0$ és $u''-u^0$ soraiban az F, F'', F'''' s í. t. a végtelenig együtthatók pontosan egyenlők, míg az F', F''', F^{V} s í. t. a végtelenig együtthatók ellentetten egyenlőek; ugyanez áll az $u'''-u^0$ és $u''''-u^0$-ra is, úgy hogy $u'-u''+u'''-u''''$ sorfejtésében a váltakozó tagok eltünnének (a mint az előzőkből könnyen következik). A valóságban azonban $n=2$ s akkor általánosságban $u'-u^0$ és $u''-u^0$ sorai között ilynemű összefüggés szigorúan nem áll fenn, mert már R^{-6}-ra nem kapunk pontosan ellentett együtthatókat; mindazonáltal kimutatható, hogy ezen tag is eltünik az $u'-u''+u'''-u''''$ összetételben, úgy hogy $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(u'-u''+u'''-u'''')$ ilyen alakú:

$$LR^{-3}+L'R^{-5}+L''R^{-7}+ \text{ s í. t.}$$

vagy általánosabban, ha n értékét egyelőre határozatlanul hagyjuk,

$$LR^{-(n+1)}+L'R^{-(n+3)}+L''R^{-(n+5)}+ \text{ s í. t.}$$

hol $L=F$.

III. Kivánatos a ψ és u szögeket úgy választani, hogy a mérésüknél elkövetett kis hiba F értékét ne változtassa érezhetően. Ezen czélból U értéke adott ψ értéknél úgy választandó, hogy F maximum legyen, azaz, hogy

$$\operatorname{ctg}(\psi-U)=n\operatorname{tg}(\psi-u^0)$$

legyen. Akkor

$$F=\pm\frac{mM}{mT+\Theta}\sqrt{nn\sin(\psi-u^0)^2+\cos(\psi-u^0)^2}.$$

A ψ szög pedig úgy választandó, hogy F eme értéke maximum vagy minimum legyen: amaz bekövetkezik, ha $\psi-u^0=90°$ vagy $270°$; a mikor

$$F=\pm\frac{nmM}{mT+\Theta},$$

emez ha $\psi - u^0 = 0$, vagy $180°$, a mikor

$$F = \pm \frac{mM}{mT + \Theta}.$$

19.

Két eljárás áll tehát rendelkezésünkre, mely a kisérletre leginkább alkalmas. Ezen eljárások elemeit a következő schema mutatja:

Első módszer.

A második tűnek középpontja, valamint tengelye a mágneses meridiánra* merőleges egyenesben fekszik.

Kitérités	Tű fekvése		Középpont	Északi pólus
u=u′	$\psi =$ 90°	U= 90°	Keletre	Keletre
u=u″	$\psi =$ 90°	U= 270°	Keletre	Nyugatra
u=u‴	$\psi =$ 270°	U= 90°	Nyugatra	Keletre
u=u⁗	$\psi =$ 270°	U= 270°	Nyugatra	Nyugatra

Második módszer.

A második tű középpontja a mágneses meridiánban fekszik.

Kitérités	Tű fekvése		Középpont	Északi pólus
u=u′	$\psi =$ 0°	U= 270°	Északra	Nyugatra
u=u″	$\psi =$ 0°	U= 270°	Északra	Keletre
u=u‴	$\psi =$ 180°	U= 90°	Délre	Nyugatra
u=u⁗	$\psi =$ 180°	U= 90°	Délre	Keletre

* Pontosabban, azon függélyes síkra, melynek az $u = u^0$ érték felel meg, azaz, a melyben a mágneses tengely egyensúlyi helyzetében fekszik, ha a második tűt eltávolítjuk. Különben is a gyakorlatban a különbség egyrészt kicsiny volta miatt, másrészt a III. czikkben mondottak alapján biztosan elhanyagolható.

Ha továbbá $\frac{1}{4}(u'-u''+u'''-u'''')=v$ és

$$\operatorname{tg} v = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} + \text{ s i. t.},$$

akkor az első módszernél

$$L = \frac{nmM}{mT+\theta}$$

a másodiknál

$$L = \frac{mM}{mT+\theta}.$$

20.

Az eliminácio elméletéből könnyen következik, hogy a számítás az elkerülhetetlen észlelési hibák miatt annál pontatlanabb, minél több együtthatót kell meghatároznunk az eliminaczióval. Azért olyan becses a 18. fej. II. pontjában leírt módszer: eltünteti az $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$ együtthatókat. Teljes szimmetria esetében ezen együtthatók ugyan magoktól kiesnek, ebben azonban meg nem bizhatunk. Különben csekély eltérés a szimmetriától sokkal kisebb befolyással van az első módszerben, mint a másodikban, és ha annál legalább arról gondoskodunk, hogy a h' pont, melytől mérjük a távolságokat, a h ponton átmenő meridiánban feküdjék, $u'-u''$ és $u'''-u''''$ között alig lesz észrevehető különbség. Másképp áll a dolog a második módszernél, különösen ha a készülék excentrumos felfüggesztést igényel. Ezen módszerrel sokkal kisebb pontosságot érhetünk el, valahányszor a helyiség két oldalról való észlelést meg nem enged. Azonkivül az első módszer különösen azért előnyösebb, mert kétszer akkora L értéket ad mint a második, a valóságban ugyanis $n=2$. Különben ha a második módszernél excentrumos felfüggesztés esetében az $R^{-(n+2)}$-től függő tagot lehetőleg el akarjuk tüntetni, akkor a h' pontot úgy kell választanunk, hogy a tű középpontja h és h' közepén feküdjék, a mikor $u=u^0$; a számítást azonban, mely ezen eredményre vezetett, rövidség kedvéért itt nem közöljük.

21.

Az előző számításokban az n kitevőt határozatlanul hagytuk: 1832 jun. 24—28 két sorozatos kisérletet végeztünk oly nagy távolságokból, mint azt a helyi viszonyok megengedték, ezekből világosan kitűnik, milyen értéket követel meg a természet. Az első sorozatban a második tűt (a 19. fejezet első módszere értelmében) a mágneses meridiánra merőleges egyenesbe, a második sorozatban a tű középpontját magába a meridiánba helyeztük. A kisérletek eredményét átnézetben a következő táblázat mutatja; az R távolságok méterekben vannak kifejezve, és a $\frac{1}{4}(u'-u''+ +u'''-u'''')$ szög az első sorozatban v-vel, a másodikban v'-tel van megjelölve.

R	v	v'
1,1 m		1° 57′ 24,8″
1,2		1 29 40,5
1,3	2° 13′ 51,2″	1 10 19,3
1,4	1 47 28,6	0 55 58,9
1,5	1 27 19,1	0 45 14,3
1,6	1 12 7,6	0 37 12,2
1,7	1 0 9,9	0 30 57,9
1,8	0 50 52,5	0 25 59,5
1,9	0 43 21,8	0 22 9,2
2,0	0 37 16,2	0 19 1,6
2,1	0 32 4,6	0 16 24,7
2,5	0 18 51,9	0 9 36,1
3,0	0 11 0,7	0 5 33,7
3,5	0 6 56,9	0 3 28,9
4,0	0 4 35,9	0 2 22,2

Ezen számok felületes megtekintésnél is mutatják, hogy nagyobb értékeknél a második oszlop számai közel kétszer akkorák mint a harmadikéi, valamint azt is, hogy mindkét oszlop számai közel a távolság harmadik hatványával forditva arányosak, úgy hogy az $n=2$ érték minden kétségen kívül helyes. Hogy ezen törvényt még pontosabban igazoljuk, az összes számokat a legkisebb négyzetek módszerével kezeltük, a miből az együtthatókra á következő értékeket nyertük:

$$\operatorname{tg} v = 0{,}086870\, R^{-3} - 0{,}002185\, R^{-5}$$
$$\operatorname{tg} v' = 0{,}043435\, R^{-3} + 0{,}002449\, R^{-5}.$$

A következő táblázatban az ezen képletekkel számitott értékek a tényleg észleltekkel állanak szemben.

Számitott értékek.

R	v	Eltérés	v'	Eltérés
1,1 m			1 57′ 22,0″	+ 2,8″
1,2			1 29 46,5	— 6,0
1,3	2° 13′ 50,4	+ 0,8″	1 10 13,3	+ 6,0
1,4	1 47 24,1	+ 4,5	0 55 58,7	+ 0,2
1,5	1 27 28,7	— 9,6	0 45 20,9	— 6,6
1,6	1 12 10,9	— 3,3	0 37 15,4	— 3,2
1,7	1 0 14,9	— 5,0	0 30 59,1	— 1,2
1,8	0 50 48,3	+ 4,2	0 26 2,9	— 3,4
1,9	0 43 14.0	+ 7,8	0 22 6,6	+ 2,6
2,0	0 37 5,6	+ 10,6	0 18 55,7	+ 5,9
2,1	0 32 3,7	+ 0,9	0 16 19,8	+ 4,9
2,5	0 19 2,1	— 10,2	0 9 38,6	— 2,5
3,0	0 11 1,8	— 1,1	0 5 33,9	— 0,2
3,5	0 6 57,1	— 0,2	0 3 29,8	— 1,0
4,0	0 4 39,6	— 3,7	0 2 20,5	+ 1,7

22.

Az előbbeni kisérleteket főképen azon czélból végeztük, hogy a mágneses hatás törvényét minden kétséget kizárólag biztosítsák, továbbá, hogy megvizsgáljuk a sornak hány tagját kell tekintetbe vennünk és hogy a kisérletek mily fokú pontosságot engednek meg. Kitünt belőlük, hogy ha a távolságok a tű négyszeres hosszánál nem kisebbek, két tag elegendő.* Különben

* Ezen kisérleteknél körülbelül 0,3 m. hosszú tűket alkalmaztunk; ha megkisérlettük volna az R^{-7} tagot is tekintetbe venni, a pontosság inkább csökkent, mint növekedett volna.

nem szabad a számitás és észlelés eltéréseit tisztán észlelési hibáknak betudnunk: mert akkor még nem tettünk meg több elővigyázati intézkedést, melyeket alkalmazva, nagyobb egyezést várhatunk. Ide számítandó a földi mágneses intenzitás napi ingadozásából származó javítás, melyet tekintetbe kell vennünk oly módon, hogy észlelünk még egy második tűt is a 10. fejezet II. utasítása szerint. Hogy azonban megtudjuk a földi mágnesség értékét, a mint az ezen kisérletekből levezethető, a többi idevágó kisérletet is felsoroljuk.

A $\frac{\theta}{Tm}$ viszony értékét az első tű és fonál számára a 8. fejezetben tárgyalt módszer szerint $\frac{1}{251,96}$-nak találtuk. Ebből

$$\frac{M}{T} = 0,0436071.$$

Ezen értékben mint hosszegység a méter szerepel. Ha inkább a millimétert választjuk hosszegységnek, ezen számot még 1000 köbével kell szoroznunk, úgy hogy

$$\frac{M}{T} = 43607400.$$

A második tűre vonatkozólag a jun. 28-án végzett kisérletekből kitünt (a 11. fejezetben leírt eljárás alapján), hogy

$$TM = 135457900,$$

ha a millimétert, milligrammot és a középnapi idő másodperczet választjuk mint egységeket.

Ebből eliminálva M-t,

$$T = 1,7625.$$

23.

Ha kisérleteket végzünk azon czélból, hogy a földi mágnesség T értékét meghatározzuk, kiválóan fontos arról gondoskodnunk, hogy a kisérletek ne vegyenek tulságosan hosszú időt igénybe, nehogy a tű mágneses állapotának érezhető megváltozásától kelljen tartanunk. Ajánlatos azért, a mozgó tű kitérítéseinek észlelésénél a 20. fejezet első eljárását alkalmazni, miután két távolságot alkalmasan választottunk, feltéve, hogy a sornak két tagja elegendő. A módszernek sok alkalmazása közül egyet választunk mint példát és pedig azt, melyre a legkinosabb gondot fordítottuk, a mennyiben a távolságokat mikroszkopikus pontossággal mértük.

A kisérleteket 1832 szeptember 18-án végeztük két eszközzel (*A* és *B*) és pedig három tűvel (1, 2, 3). Az első és második tűt már a 11. fejezetben említettük mint elsőt és másodikat. A kisérletek két csoportra oszlanak.

Először is egyidőben észleltük az első tűnek lengéseit *A*-ban és a második tű lengéseit *B*-ben. A lengésidőket végtelen kis kilengésre visszavezetve, találtuk

az első tűre ... ... 15,22450″
a második tűre 17,29995

az előbbit 305, utóbbit 264 lengésből.

Ezután a harmadik tűt az *A* eszközbe akasztottuk, az első tűt pedig a mágneses meridiánra merőleges egyenesbe helyeztük keletre és nyugatra és pedig kétféle módon, és észleltük a harmadik tű kitéréseit az első tű egyes helyzeteinek megfelelőleg. Ezen kisérletek, melyeket két különböző *R* távolságból ismételtünk, a következő *v* szögleteket adták (a 19. és 21. fejezet értelmében)

$$R = 1{,}2^m \qquad v = 3°42'19{,}4''$$
$$R = 1{,}6 \qquad v = 1°34'19{,}3''.$$

Ezen kisérletek folyamán is észleltük a két tű lengéseit a *B* eszközben. Az időtartam közepének a 414 lengésből számított 17,29484 mp.-nyi lengésidő felel meg, végtelen kis amplitudóra visszavezetve.

Az időt oly órán észleltük, mely naponkint 14,24″-et késett. Ha *M* és *m* az első illetve harmadik tű szabad mágnességének momentumát jelenti, *θ* pedig a fonal csavarási állandóját az *A* eszközben, mialatt az első vagy harmadik tűt hordta (a súlyuk majdnem egyforma), akkor kapjuk

$$\frac{\theta}{TM} = \frac{1}{597,4}$$

mint a 11. fejezetben és

$$\frac{\theta}{Tm} = \frac{1}{721,6}$$

mert a harmadik tű erősebben volt mágnesezve mint az első tű. Az első tű tehetlenségi momentuma előző kisérletekből már ismeretes volt (l. 11. fej.); ezekből $K = 4228732400$, ha a milliméter és milligramm szolgálnak egységül.

A thermometer változása a két teremben, hol az eszközök állottak, a kisérletek egész tartama alatt oly csekély volt, hogy fölösleges azt tekintetbe vennünk.

Áttérünk most a földi mágnesség T intenzitásának kiszámítására ezen kisérletekből. A második tű lengéseinek eltérése ezen intenzitás csekély változásáról tesz tanuságot: hogy tehát egy meghatározott értékről lehessen szó, az első tű észlelt lengésidejét a földi mágnességnek a kisérletek második részének megfelelő középállapotára fogjuk visszavezetni. Ezen lengésidő még egy javitást igényel az óra késése miatt és egy harmadikat a fonal csavarása miatt. Ily módon a lengésidőnek következő javitott értékét kapjuk:

$$= 15,22450 \times \frac{17,29484}{17,29995} \cdot \frac{86400}{86385,76} \cdot \sqrt{\frac{598,4}{597,4}} =$$
$$= 15,23500'' = t.$$

Ebből

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt} = 179770600.$$

Ezen érték csekély eltérése a szept. 11-én találttól (11. fej.) a földi mágnességben és a tű mágneses állapotában beállott változásnak tulajdonitandó.

Az észlelt kitérítésekből nyerjük

$$F = \frac{R'^5 \operatorname{tg} v' - R^5 \operatorname{tg} v}{R'R' - RR} = 113056200,$$

ha a milliméter szolgál egységül és innen

$$\frac{M}{T} = \tfrac{1}{2}F\left(1 + \frac{\theta}{Tm}\right) = 56606437.$$

Ezen számot TM értékével összehasonlítva, találjuk, hogy a földi mágnességnek vízszintes intenzitása szept. 18. öt órakor

$$T = 1{,}782088.$$

24.

Az imént leirt kisérleteket a csillagdán végeztük, miközben az eszközök helyét úgy választottuk, hogy közelükben lehetőleg semmi vas se legyen. Mindazonáltal nem szenved kétséget, hogy az épület falaiban, az ablakokon, ajtókon levő nagyobb mennyiségű vastömegek, sőt a nagyobb csillagászati műszereken található vasalkatrészek, melyekben a földi mágneses erő mágnességet indukál, a felfüggesztett tűkre nem elhanyagolható hatást gyakorolnak. A belőlük származó erő a földi mágnességnek nemcsak irányát, hanem intenzitását is megváltoztatja, úgy hogy kisérleteink nem adják a földi mágnesség intenzitásának zavartalan értékét, hanem annak módositott értékét az A műszer helyén. Ezen módositás mindaddig, míg a vastömegek helyükön maradnak, és a földi mágnesség elemei (az intenzitása és az iránya) nem változnak jelentékenyen, érezhetően állandó fog maradni. A nagysága eddig ugyan ismeretlen, nem hiszem azonban, hogy az egész érték egy vagy két századát túlhaladja. Különben is nem ütköznék nehézségekbe az értékét legalább közelitőleg meghatározni; egyidejüleg észlelnünk kellene két tű lengéseit, melyek egyike a rendes észlelő helyen, másika pedig az épülettől és egyéb zavaró vastömegektől távol volna felfüggesztve és melyek aztán helyet cserélnének. Eddig azonban nem állott módunkban ezen kisérleteket megtenni. A legbiztosabban orvosolhatjuk ezen bajt, mágneses észlelésekre szánt külön épülettel, mely királyi kegy folytán nemsokára elkészül és melyből minden vas egyáltalán ki van zárva.

25.

A közölt kisérleteken kivül sok más hasonlót végeztünk, igaz kezdetben kevesebb gonddal. Nem lesz érdektelen az eredményeket itt táblázatba foglalni, miközben azonban mellőztük azokat, melyeket a finomabb műszerek felállítása előtt durvább eszközökkel a legkülönfélébb méretű tűkkel nyertünk, ámbátor mindegyik legalább megközelíti a valóságot. Ismételt kisérletek a következő T értékeket szolgáltatták:

Sorszám	Idő	T
I.	1832 Május 21	1,7820
II.	Május 24	1,7694
III.	Junius 4	1,7713
IV.	Junius 24—28	1,7625
V.	Julius 23, 24	1,7826
VI.	Julius 25, 26	1,7845
VII.	Szept. 9	1,7764
VIII.	Szept. 18	1,7821
IX.	Szept. 27	1,7965
X.	Okt. 15	1,7860

Az V—IX. kisérleteket egy ugyanazon helyen, az I—IV. kisérleteket ellenben különböző helyeken végeztük; a X. kisérlet tulajdonképen vegyes, a mennyiben a kitéréseket a rendes helyen, a lengéseket azonban más helyen észleltük. A VII. és VIII. kisérletekre majdnem egyforma gondot, a IV., V., VI. és X-re kevesebbet és az I—III-ra sokkal kevesebb gondot forditottunk. Az I—VIII. kisérleteknél különböző tűket használtunk ugyan; súlyuk és hosszuk azonban egyforma volt (súlyuk 400 és 440 gr. között volt); ellenben a X. kisérlet tűjének súlya 1062 gr., hossza 485 mm. volt. A IX. kisérlet csak arra szolgált, hogy kitünjék milyen fokú pontosságot lehet elérni igen kis tűvel. A használt tű súlya 58 gr. volt, különben azonban ugyanolyan gondosan mértünk, mint a VII. és VIII. kisérletnél. Nem szenved kétséget, hogy az észlelés finomsága észrevehetően fokozható, ha még nehezebb tűket használunk, pl. 2000 vagy 3000 gr.-osakat.

26.

Ha a földi mágneses erő intenzitását *T*-t számokban fejezzük ki, akkor ezen *k* számnak bizonyos *V* egység szolgál alapul, t. i. egy bizonyos azzal egynemű erő, melynek összefüggése a többi közvetlenül adott egységekkel az előbbiekben bennfoglaltatik; igaz kissé bonyolódott módon: érdemes lesz tehát ezen összefüggést itt újból feltüntetni, hogy azután elementaris világossággal kitünjék, miféle változást szenved a *k* szám, ha az alapegységekről másokra térünk át.

A *V* egység megállapitására a szabad mágnesség *M** és a távolság *R* egységéből kell kiindulnunk és *V*-t egyenlővé teszszük azon erővel, melyet *M* az *R* távolságból gyakorol.

Az *M* egységül azon mágneses folyadék mennyiséget választottuk, mely az *R* távolságra levő vele egyenlő *M* mennyiségre az egységnyi mozgató erőt *W*-t (vagy ha úgy tetszik nyomást) gyakorolja, azaz oly erőt, mely a tömegegységen *P*-n, a gyorsitó erő egységét *A*-t létesiti.

Az *A* egység megállapitására két út áll rendelkezésünkre: *A*-t ugyanis vagy egy közvetlenül adott hasonló erő szolgáltatja, pl. a nehézség az észlelő helyen, vagy pedig *A*-nak hatása, mely a testek mozgásában nyilatkozik. Utóbbi esetben — számitásainkban ezen útat követtük — két új egység szükséges, t. i. az időegység *S* és sebességegység *C*, úgy hogy egységül azon gyorsitó erő szolgál, mely *S* ideig hatva a *C* sebességet hozza létre; utóbbinak egysége végre ama sebesség, melyet az *S* idő alatt egyenletesen befutott *R* út szolgáltat.

Világos ezek után, hogy a *V* egység három egységtől függ: *R, P, A*-tól vagy *RPS*-től.

---

* Alig szükséges megjegyeznünk, hogy a betűknek előbb adott értelme itt megszünik.

Tegyük fel már mostan, hogy a V, R, M, W, A, P, C, S egységek helyébe másokat választunk: $V', R', M', W', A', P', C', S'$-et, melyek hasonló módon függnek egymással össze, mint az előbbeniek és tegyük fel, hogy a V' egységet használva a földi mágnesség nagyságát a k' szám fejezi ki, akkor megvizsgálandó, miféle viszonyban van ez a k-hoz.

Ha tesszük

$$\begin{aligned} V &= vV' \\ R &= rR' \\ M &= mM' \\ W &= wW' \\ A &= aA' \\ P &= pP' \\ C &= cC' \\ S &= sS' \end{aligned}$$

akkor v, r, m, w, a, p, c, s abszolut számok és

$$kV = k'V' \quad \text{vagy} \quad kv = k'$$

$$v = \frac{m}{rr}$$

$$\frac{mm}{rr} = w = pa$$

$$a = \frac{c}{s}$$

$$c = \frac{r}{s}.$$

Ezen egyenletekből:

$$\text{I.} \quad k' = k\sqrt{\frac{p}{rss}}$$

$$\text{II.} \quad k' = k\sqrt{\frac{pa}{rr}}.$$

Ha azon az úton maradunk, melyet észleléseinknél követtünk, akkor az első képletet kell használnunk; ha pl. a milliméter és milligramm helyett a métert és grammot választjuk egységeknek, akkor $r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, tehát $k' = k$; ha a párisi vonalat és

a berlini fontot fogadjuk el, akkor $r = \frac{1}{2,255829}$, $p = \frac{1}{467711,4}$
tehát

$$k' = 0,002196161\, k.$$

Ez esetben pl. a VIII. kisérletből

$$T = 0,0039131.$$

Ha inkább a másik utat választjuk és a nehézség szolgál a gyorsító erő egységéül, akkor a göttingai csillagda helyén $a = \frac{1}{9811,63}$; ez esetben, ha a millimétert és milligrammot megtartjuk, a k értékeket 0,0109554-gyel kell szoroznunk és amaz egységek változására a II. képletet alkalmaznunk.

27.

A mágneses vízszintes erő intenzitását T-t az inklináczio secansával kell szoroznunk, hogy megkapjuk az egész intenzitást. Hogy az inklináczio Göttingában változik és hogy jelenleg kisebbedik, azt Humboldt észlelései mutatták meg, a ki azt 1805 decz. havában 69°29′-nyinek, 1826 szept. havában 68°29′26″-nyinek találta. Hasonló módon, azon inklinatoriummal, melyet annak idején a boldogult Mayer használt, 1832 jun. 23-án 68°22′52″-t kaptam, a mi a kisebbedés lassudására látszik mutatni; ezen észlelésben azonban kevésbbé bizom, nemcsak a műszer tökéletlensége miatt, hanem azért is, mivel ez observatoriumban végzett észlelések vastömegek zavaró hatásától nincsenek eléggé megvédve. Különben a jövőben ezen elem is nagyobb gondban fog részesülni.

28.

Ezen értekezésben a mágneses jelenségeknek általánosságban elfogadott magyarázatához csatlakoztunk, mert sokkal egyszerűbb számításokra vezet, mint a másik felfogás, mely a mágnességet a részecskék körül keringó galván áramoknak tulajdonítja; nem volt szándékunk ezen felfogást, mely több tekintetben előnyös, sem megerősiteni, sem visszautasitani; nem lett volna helyén, mivel úgy látszik, hogy ilyen áramelemek egymásra való hatásának törvénye nincs eléggé kikutatva. Azonban a mágneses és elektromágneses jelenségek bármely felfogása jusson is érvényre: az előbbiekre vonatkozólag ugyanazon eredményekre kell vezetnie, mint a közönséges elméletnek és a mit ennek alapján a jelen értekezésben kifejtettünk a lényegében nem, csak alakjában szenvedhet változást.

Jegyzetek.

Gauss eme értekezését latin nyelven irta. Czíme: Intensitas vis magneticæ terrestris ad mensuram absolutam revocata. 1832 decz. 15-én mutatta be a «Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften» tudós társaságnak. Nyomtatásban megjelent eme társaság kiadványainak VIII. kötetében 1836-ban. Megjelent azonfelül Gauss összes műveinek V. kötetében. Jelen fordítás ezen kiadás után készült. Német fordításban kiadta E. Dorn, (Ostwald's Klassiker 53. 1894).

*

Az értekezés bevezetésében Gauss oly módszer fontosságát és nagy tudományos értékét fejtegeti, mely a földi mágneses erő intenzitását változatlan és a használt mágnestű alkatától független egységekben adja. Az első fejezet tartalmazza ama alapelvet, melynek alapján az összes mágneses mennyiségek ily változatlan egységekben mérhetők. Ezen egységek a hosszidő és tömegegységből levezethetők. Ezzel Gauss megalapitotta az abszolut mágneses mértékrendszert.

Más helyen * Gauss kiemeli, hogy az abszolut mértékrendszer kiterjesztése az elektromos jelenségekre semmi nehézségbe nem ütközik. Barátja és dolgozótársa Weber azután meg is teremtette az abszolut elektromágneses mértékrendszert. Azóta úgy a tudomány, mint a technika elfogadta az abszolut mértékrendszert.

* Göttinger gelehrte Anzeigen 1832 decz. 24.

Az említett alapelvből kiindulva Gauss módszert dolgozott ki a földi mágneses intenzitás meghatározására. A módszer pontossága és megbizhatósága mellett legjobban bizonyít az, hogy még manapság is általánosan használatban van. Ezen módszer részletes bemutatása képezi a jelen értekezés főrészét.

Eme módszer alkalmazása a mágnestű lengésidejének és néhány foknyi kitérítéseinek lehető pontos észlelését tette szükségessé. Erre eszelte ki Gauss a tükörleolvasás ma már általánosan ismert és alkalmazott eljárását.* Ezen eljárást Gauss eme értekezésben nem írja le. Több értekezésében ismerteti eme eljárást, legrészletesebben a «Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins» 1836-iki évfolyamában.

1. (14. l.) A sztatikai alapelvek, melyekből a fejezet fejtegetései folynak, a következőkbe foglalhatók össze:

A mágneses intenzitás a tér minden pontjában legyen állandó nagyságú és irányú. Nagysága P, iránycosinusai legyenek $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Derékszögű koordinatarendszert vezetünk be; a tengelyek legyenek x, y, z. A P intenzitás három összetevője legyen P_x, P_y, P_z, úgy hogy a dm elemre működő három erőösszetevő $P_x dm, P_y dm, P_z dm$. A mágnesre működő összes transzlácziós erő három összetevője:

$$\Sigma P_x dm = P_x \Sigma dm = 0$$
$$\Sigma P_y dm = P_y \Sigma dm = 0$$
$$\Sigma P_z dm = P_z \Sigma dm = 0$$

a mágnesre ható erők tehát csak forgató momentumot hozhatnak létre.

A forgató momentum három összetevője legyen F_x, F_y, F_z, az eredő forgató momentum pedig F. Akkor a mint a mechanika elemeiből ismeretes,

$$F_x = \Sigma(y P_z\, dm - z P_y\, dm) = P_z \Sigma y dm - P_y \Sigma z\, dm$$
$$F_y = \Sigma(z P_x\, dm - x P_z\, dm) = P_x \Sigma z dm - P_z \Sigma x dm$$
$$F_z = \Sigma(x P_y\, dm - y P_x\, dm) = P_y \Sigma x dm - P_x \Sigma y dm$$

* Tőle függetlenül Poggendorff is alkalmazta.

vagy GAUSS jelöléseit használva,

$$F_x = P_z Y - P_y Z = PM(\cos\nu\cos\beta - \cos\mu\cos\gamma)$$
$$F_y = P_x Z - P_z X = PM(\cos\lambda\cos\gamma - \cos\nu\cos\alpha)$$
$$F_z = P_y X - P_x Y = PM(\cos\mu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\beta).$$

A mágnestű egyensúlyban van, ha az összes forgató momentum, tehát annak három összetevője zérus, azaz ha

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

vagyis ha a mágneses tengely a mágneses erő irányába esik.

Ha eme feltétel nincs kielégítve a mágnesre ható eredő forgató momentum

$$\begin{aligned} F &= (F_x^2+F_y^2+F_z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= PM[(\cos\nu\cos\beta-\cos\mu\cos\gamma)^2+(\cos\lambda\cos\gamma-\cos\nu\cos\alpha)^2+ \\ &+(\cos\mu\cos\alpha-\cos\lambda\cos\beta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= PM\sin\vartheta, \end{aligned}$$

hol ϑ a mágneses intenzitás és a mágneses tengely képezte szög. Az is látható, hogy az eredő forgatómomentum tengelye merőleges az M és P irányokra.

Ha már mostan az A és B pontokban ellentett irányú, $\frac{PM}{r}$ nagyságú két erőt alkalmazunk a D irányban, akkor ezek forgató momentuma könnyen beláthatólag $\frac{PM}{r}.\, r\sin\vartheta = PM\sin\vartheta$, tehát tényleg ugyanazt a hatást hozzák létre, mint a mágneses erők. A fejezet többi része már könnyen érthető. A fejezet tárgyalási módja élénken világítja meg az 1. fejezetben mondottakat, hogy t. i. a mágneses erők a mechanikai erőkkel hasonlíthatók össze, illetve ezekkel mérhetők.

2. (16. l.) A mágnestű egyensúlyban van, ha az összes reá ható erők forgató momentuma a C ponton átmenő három egymásra merőleges tengely körül eltűnik. Az egyik tengely legyen vertikalis, nevezzük z tengelynek, a másik az y tengely, vízszintes a meridiánsíkban, a harmadik az x tengely, merőleges a meridiánsíkra; mind a három tengely átmegy a C ponton. Mindenekelőtt vilá-

gos, hogy a nehézség nem ad forgató momentumot a vertikalis tengely körül, egyensúly esetében tehát a mágneses erők sem adhatnak ugyanazon tengely körül, a mi csak úgy lehetséges, ha a mágneses tengely a meridiánsíkba esik, melyben a mágneses erő hat. Ha pedig a mágneses tengely a meridiánsíkba esik, akkor a mágneses erőnek nincs forgató momentuma az y tengely körül, mert hisz ez is a mágneses meridiánsíkban fekszik. Akkor azonban egyensúly esetében a nehézség sem adhat forgató momentumot az y tengely körül, a mi csak úgy lehetséges, ha a mágnes súlypontja a meridiánsíkba esik. Az egyensúlynak első feltétele tehát, hogy a C ponton, a mágneses tengelyen és a tömegközépponton átfektetett sík a meridiánsík legyen.

A mágnes tengelye már mostan egyensúly esetében úgy helyezkedik el, hogy az x tengely körüli forgató momentum is zérus legyen. Hogy ennek feltételét megállapitsuk, a földi mágneses intenzitást két összetevőre bontjuk: T a horizontalis, T' a vertikalis összetevő. Ha a mágnes tengelye i szöggel hajlik el a vízszintes siktól (a meridiánsikban), akkor 'a 6. fejezet alapján a földi mágneses erő vízszintes összetevőjének forgató momentuma $MT \sin i$; ugyanekkorának kell lennie a vertikalis összetevő és a nehézség együttes forgató momentumának. A vertikalis összetevő hatását GAUSS a 6. fejezetben egy erőpárral helyettesíti. Az erőpárban szereplő erők egyike a tömegközéppontban A'-ban, a másika a B' pontban működik; mindkét erő egyenlő a mágnes súlyával. Ugyancsak A'ban működik a nehézség, mely az ugyanott támadó előbb említett erőt megsemmisíti, úgy hogy csak a B'-ben ható erő marad meg, melynek forgató momentuma egyenlő a test súlyából és B'-nek a C-n átmenő függélyestől mért távolságából képezett szorzattal.

3. (17. l.) A gyorsulás egységének változtatása mellett, a hossz-, tömeg- és időegység változatlan marad. A gyorsulás számértékét az új mértékrendszerben úgy kapjuk a régiből, hogy azt a nehézség gyorsulásának értékével (a régi rendszerben) osztjuk. Ugyanily arányban változik meg az erőnek (tömeg és gyorsulás szorzata) és forgató momentumnak számértéke is. TM pedig alapjában

forgató momentum, a mint az a 6. fejezet fejtegetéseiből látható. TM számértékét kapjuk az új rendszerben, ha előbbi értékét g értékével osztjuk. Ha l a másodpercznyi inga hossza, akkor az inga képletéből

$$1=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

vagyis $g=\pi^2 l$. Tehát TM értékét $\pi^2 l$-lel osztva, megkapjuk TM értékét az új rendszerben.

4. A (17. l.) $\frac{\Theta}{TM}=\frac{1}{n}$ értéket «torzio viszony»-nak szokás nevezni.

A fonal torziója következtében a mágnestű nem követi teljesen a mágneses meridián változásait, azaz ha a mágneses meridián iránya δ szöglettel változik, a mágnestű egyensúlyi helyzete csak $\frac{n}{n+1}\delta$-val változik. A mágnestű tengelye általánosságban nem helyezkedik a mágneses meridiánba, hanem azzal bizonyos u_0 szögletet zár be, mely a

$$TM\sin u_0=\Theta(v-u_0)$$

egyenletet kielégíti (l. 8. fej.). Kis szögletekről lévén szó, e helyett írhatjuk

$$TMu_0=\Theta(v-u_0).$$

Ha most a mágneses meridián iránya δ szöglettel változik, a mágnestű tengelye δ' szöglettel fordul el oly helyzetbe, melyben a mágneses forgató momentum a fonal csavarásából származó forgató momentummal egyensúlyban van. Ha a mágneses tengely δ' szöglettel tér ki, a régi meridiánnal $u_0+\delta'$ szögletet zár be, az újjal pedig $u_0+\delta'-\delta$ szögletet, a mágneses forgató momentum tehát az előbbiek értelmében $TM(u_0+\delta'-\delta)$; a fonál eközben elcsavarodik δ' szöglettel, a mennyivel a mágnes elforgott; az új egyensúlyi helyzetben tehát $v-u_0-\delta'$-tel van megcsavarva; a megfelelő forgató momentum $\Theta(v-u_0-\delta')$; egyensúly esetében tehát

$$TM(u_0+\delta'-\delta)=\Theta(v-u_0-\delta').$$

Vagy az előbbeni egyensúlyi feltételt tekintetbe véve:

$$TM(\delta'-\delta)=-\Theta\delta',$$

azaz

$$\delta'=\frac{TM}{TM+\Theta}\delta=\frac{n}{n+1}\delta.$$

A fonal torzioja megváltoztatja a mágnes lengés idejét is. Egyensúly esetében ugyanis az összes forgató momentum zérus, tehát

$$0=-TM\sin u_0+\Theta(v-u_0).$$

Ha a mágneses tengely a meridiánnal tetszőleges u szögletet zár, az összes forgató momentum $=-TM\sin u+\Theta(v-u)$, tehát a mechanika elemei alapján

$$K\frac{d^2u}{dt^2}=-TM\sin u+\Theta(v-u),$$

a mit így is írhatunk:

$$K\frac{d^2(u-u_0)}{dt^2}=-TM(\sin u-\sin u_0)-\Theta(u-u_0),$$

vagy kis kitérésekre szorítkozva

$$K\frac{d^2(u-u_0)}{dt^2}=-(TM+\Theta)(u-u_0)=-TM\left(\frac{n+1}{n}\right)(u-u_0).$$

A fonal behatása tehát úgy jelentkezik, hogy TM helyébe, annak $\frac{n+1}{n}$-szeresét kell irnunk. Ezt a lengésidő képletében is megtéve, rögtön kitűnik, hogy az $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ arányában kisebbedik.

5. (19. l.) Ezen fejezethez E. Dorn Ostwald kiadásában (Ostwald's Klassiker 53) a következő megjegyzéseket fűzi:

A súlyoknak Gauss választotta elhelyezési módja némikép kifogásolható, a mennyiben azok a lengések közben a csúcsok körül foroghatnak. Ezáltal a lengéseket majd gyorsítják, majd lassítják. Előnyösebb volna a súlyokat élekre függeszteni; jelenleg Weber V. nyomán többnyire a középen átfúrt hengereket alkalmaznak, melyeket a mágnestartón lévő szögekre ráhuznak, úgy hogy minden relativ elmozdulás ki van zárva.*

* L. Dorn, Wied. Ann. 17. 788. l. 1882. Kreichgauer, Wied. Ann. 25. 273. l. 1885.

Egy másik nem lényegtelen korrekczióra FECHNER * figyelmeztetett először. A főmágnes ugyanis a lengési megfigyeléseknél északdéli irányban fekszik, a kitérítéseknél pedig erre merőlegesen, kelet-nyugati irányban. Az előbbi állásban a földi mágnesség indukczio útján megnagyobbítja a momentumát, utóbbiban ez elesik. WEBER V.** módszert nyújtott eme korrekczio meghatározására.

Miután a mágneses momentum hőmérsékleti együtthatója különböző mágnesekre elég jelentékeny különbségeket mutat (0,001—0,0003 1 Celsius fokra), a lehető legnagyobb pontosság elérésére meg kell határozni a fő mágnes hőmérsékleti együtthatóját, míg a horizontalis intenzitás változásait egy másik mágnes lengéseiből (ismeretes hőmérsékleti együtthatóval) vagy külön e czélra készült «variometer»-rel határozzuk meg. Ilyen intenzitási variometert maga GAUSS *** is szerkesztett; utóbbinak kényelmes alakot adott KOHLRAUSCH F. (Wied. Ann. 19. 1883.) A hőmérsékleti együttható meghatározására WEBER V.† gondolt ki pontos módszert.

6. (24. l.) x és y értékeit a 10. fejezet megfelelő képleteibe helyettesítve, azután a négyzetgyököt ξ és η hatványai szerint kifejtve, kapjuk a ξ és η meghatározására szolgáló lineár egyenleteket.

Az egyenletek megoldása a legkisebb négyzetek módszerével a következőképen történik: Legyen a négy egyenlet:

$$\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta &= c_1 \\ a_2\xi + b_2\eta &= c_2 \\ a_3\xi + b_3\eta &= c_3 \\ a_4\xi + b_4\eta &= c_4 . \end{aligned}$$

Olyan ξ, η értéket, mely mind a négy egyenletet kielégítene, nem lehet találni: bárminő értéket válaszszunk is ξ és η-ra, azt az

---

* FECHNER, Pogg. Ann. 55. 189. l. 1842.

** W. WEBER, Werke II. köt. 336. l., továbbá DORN, Wied. Ann. 17. 776. l. 1882. és 35. 270. és 275. l. 1888.

*** GAUSS, Resultate aus den Beobachtungen des magnet. Vereins 1837. 1. l.

† W. WEBER, Resultate aus den Beobachtungen des magnet. Vereins 1837. 38. l. (Werke II. köt. 58. l.)

egyenletek baloldalába helyettesítve a c-ktől eltérő értékeket kapunk. Az eltérést a megfelelő c értéktől «hibá»-nak nevezzük. A legkisebb négyzetek módszere már mostan azt mondja, hogy olyan $\xi'\eta'$ értékcsoportot válaszszunk, melyre a hibanégyzetek összege a legkisebb, azaz melyre

$$\sum_{\nu=1}^{4}(a_\nu \xi' + b_\nu \eta' - c_\nu)^2$$

minimum. Ennek feltétele pedig az, hogy eme összeg ξ' és η' szerint vett differencziálhányadosa eltünjék, azaz, hogy

$$\xi' \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu^2 + \eta' \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu c_\nu$$

$$\xi' \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu b_\nu + \eta' \sum_{\nu=1}^{4} b_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{4} b_\nu c_\nu .$$

Ezen egyenletrendszerből ξ' és η' kiszámitható.

7. (31. l.) Ezen egyenlet könnyen adódik, ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\sin u = \cos(u_0 - u)\sin u_0 - \sin(u_0 - u)\cos u_0 ,$$

és

$$\sin(u - N) = \sin(u - u_0)\cos(u_0 - N) + \cos(u - u_0)\sin(u_0 - N),$$

és hogy

$$mT \sin u_0 + \Theta \sin(u_0 - N) = 0.$$

8. (32. l.) $\operatorname{tg}(u - u_0)$ sor alakjához a következő módon juthatunk: Mivel

$$\Sigma eE\alpha^\nu \cos^\nu \psi = 0, \quad \Sigma eE\alpha^\nu \sin^\nu \psi = 0,$$

$$\Sigma eE\beta^\nu \sin^\nu \psi = 0, \quad \Sigma eE\beta^\nu \cos^\nu \psi = 0,$$

továbbá

$$\Sigma eE \,.\, A^\nu \cos^\nu(\psi - U) = (\Sigma EA_\nu \cos^\nu(\psi - U))\, \Sigma c = 0$$

és hasonlóképen

$$\Sigma eEA^\nu \sin^\nu(\psi - U) = 0, \quad \Sigma eEB^\nu \cos^\nu(\psi - U) = 0,$$

$$\Sigma eEB^\nu \sin^\nu(\psi - U) = 0,$$

közvetlenül belátható, hogy $f, f', f'' \ldots$ minden tagjában előfordul $\cos(\psi - u)$ vagy $\sin(\psi - u)$, illetve azoknak valamely hatványa. A

$$(mT + \Theta)\sin(u - u_0) = fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + \cdots$$

egyenletben végezzük a következő helyettesítést:

$$\sin(\psi-u)=\sin(\psi-u_0)\cos(u-u_0)-\cos(\psi-u_0)\sin(u-u_0),$$
$$\cos(\psi-u)=\cos(\psi-u_0)\cos(u-u_0)+\sin(\psi-u_0)\sin(u-u_0),$$

akkor $ff'f''\ldots$ tartalmaz tagokat, melyek $ff'f''\ldots$ előbbi alakjából úgy keletkeznek, hogy $\sin(\psi-u)$, ill. $\cos(\psi-u)$ helyébe $\sin(\psi-u_0).\cos(u-u_0)$ ill. $\cos(\psi-u_0)\cos(u-u_0)$-t irunk, azonkívül tagokat, melyekben $\sin(u-u_0)$ valami hatványa mint szorzó szerepel. A fentemlített helyettesítést elvégezvén, f a következő alakra hozható

$$f=mM(C\cos(u-u_0)-S\sin(u-u_0)),$$

hol

$$C=n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u_0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u_0),$$
$$S=n\cos(\psi-U)\cos(\psi-u_0)-\sin(\psi-U)\sin(\psi-u_0).$$

A többi f-ekre nézve megjegyezzük, hogy $\sin(u-u_0)$ rendje $R^{-(n+1)}$ rendjével egyezik, mert hisz $\sin(u-u_0)$ sorfejtése az $R^{-(n+1)}$ taggal kezdődik, és így $\cos(u-u_0)$ az egységtől csak $R^{-(2n+2)}$-edrendű tagokban különbözik az egységtől. Ezért $f'f''$-ben a $\sin(u-u_0)$ helyébe zérust, $\cos(u-u_0)$ helyébe egyet irva oly hibát követünk el, mely csak az $R^{-(2n+2)}$ stb. tagokban fog jelentkezni. Akkor $f'f''\ldots$, az előbbi $f'f''\ldots$-ektől abban különbözik csak, hogy u helyébe u_0 lép; ennek feltüntetésére jelöljük azokat $f_0'f_0''\ldots$-val. Irhatjuk tehát

$$(mT+\theta)\sin(u-u_0)=mM(C\cos(u-u_0)-S\sin(u-u_0))R^{-(n+1)}+$$
$$+f_0'R^{-(n+2)}+f_0''R^{-(n+3)}+\cdots+f_0^{(n+1)}R^{-(2n+2)}+$$
$$+\Phi,$$

hol Φ R-nek további hatványait tartalmazza, az együtthatók pedig a régi f-ekből nem származtathatók már oly egyszerű módon.

$mMS\sin(u-u_0).R^{-(n+1)}$-et átviszszük a baloldalra, azután osztunk

$$((mT+\theta)+mMSR^{-(n+1)})\cos(u-u_0)$$

-val, és az eredményt R hatványai szerint sorba fejtjük. Akkor kapjuk:

$$\operatorname{tg}(u-u_0)=\frac{mMC}{mT+\theta}R^{-(n+1)}+\frac{f_0'}{mT+\theta}R^{-(n+2)}+\dots$$

$$+\frac{f_0^{(n)}}{mT+\theta}R^{-(2n+1)}+\left(\frac{f_0^{(n+1)}}{mT+\theta}+\frac{m^2M^2SC}{(mT+\theta)^2}\right)R^{-(2n+2)}+\Phi'.$$

Ezen képletből a 18. fejezetben mondottak könnyen kiolvashatók.